Polígonos, ángulos, longitudes y áreas

Nombre e indicación	*Comando equivalente*
Ángulo - Amplitud	Angulo [A, B, α]

Al marcar dos puntos A y B aparece una ventana donde puede anotarse la amplitud del ángulo en el campo de texto de la ventana emergente. Esta herramienta produce un punto C y un ángulo α, siendo α el ángulo ABC.

Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

Ángulo	Angulo [A, O, B]

Esta herramienta crea:

- El ángulo entre tres puntos A, O y B, donde O es el vértice.
- El ángulo entre dos segmentos.
- El ángulo entre dos rectas.
- El ángulo entre dos vectores.
- Todos los ángulos interiores de un polígono.

Todos estos ángulos están limitados a una amplitud entre 0° y 180°.

Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

Polígono	Polígono [A, B, C, D]

Marcar al menos tres puntos que constituirán sus vértices y volver a hacer clic nuevamente sobre el primero de ellos, para cerrarlo. El área del polígono aparecerá en la Vista Algebraica. Varios objetos, se crearán al mismo tiempo: Los vértices (puntos), los lados (segmentos) y el polígono (cuyo valor se ofrece como área).

- El polígono puede ser no convexo. Incluso puede ser cruzado (estrellado). La acción puede ser cancelada pulsando **Esc**, pero se conservarán los puntos hasta ese momento.
- Mantener pulsado el botón del ratón al tiempo que se crea un nuevo punto permite colocarlo con precisión.
- Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

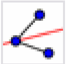
Polígono Regular	Polígono [A, B, n]

Al marcar dos puntos, A y B y anotar un número *n* en el campo del cuadro de diálogo emergente, se traza un polígono regular con *n* vértices (incluyendo los puntos A y B) en sentido antihorario. Varios objetos, se crearán al mismo tiempo: Los vértices (puntos), los lados (segmentos) y el polígono (cuyo valor se ofrece como área)

- La acción puede ser cancelada pulsando Esc, pero se conservarán los puntos hasta ese momento.
- Si el número o expresión numérica introducido en el cuadro de diálogo es indefinido se crearán dos segmentos (un lado doble) que unen los vértices indicados.

➢ Mantener pulsado el botón del ratón al tiempo que se crea un nuevo punto permite colocarlo con precisión.

Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

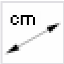


Bisectriz	Bisectriz [A, O, B]

La bisectriz de un ángulo puede definirse de dos maneras:

- Al marcar los tres puntos A, O y B se dibuja la bisectriz del ángulo determinado por los puntos A, O y B, siendo O el vértice.
- Al marcar dos rectas se producen las bisectrices de sendos ángulos.

Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



Distancia o Longitud	Distancia [A, B]

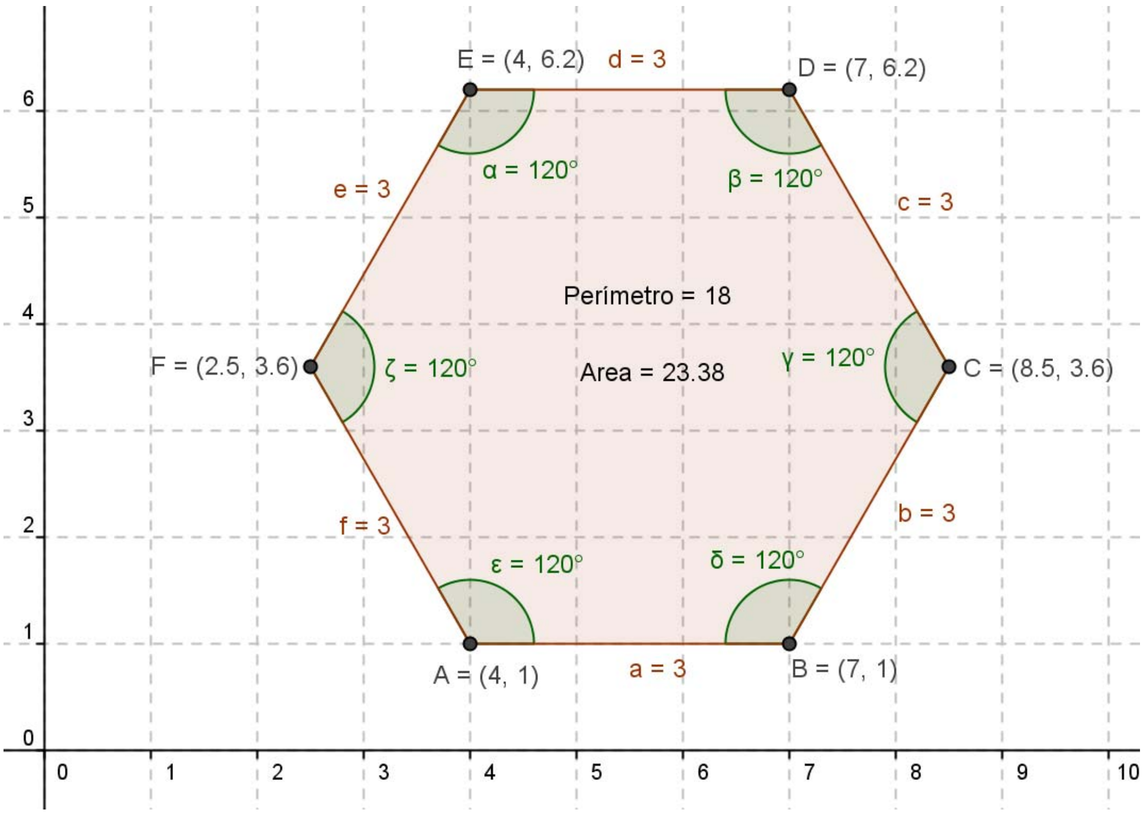
Esta herramienta calcula la *distancia entre dos puntos, la longitud de un segmento y el perímetro del polígono*. Los puntos deben existir con anterioridad.

Seleccionando el icono ***Distancia o Longitud***, cuarto por la derecha, y a continuación pulsando en el interior del polígono se mostrará su perímetro.

Área	Área [A, B, C, ...] Área [c]

Esta herramienta *ofrece el área de un polígono* como texto dinámico en la Vista Gráfica. El texto se aplicará, en la Vista Gráfica, en la posición que indique el puntero al hacer clic.

Seleccionando el icono ***Área***, cuarto por la derecha, y a continuación pulsando en el interior del polígono se mostrará su área.

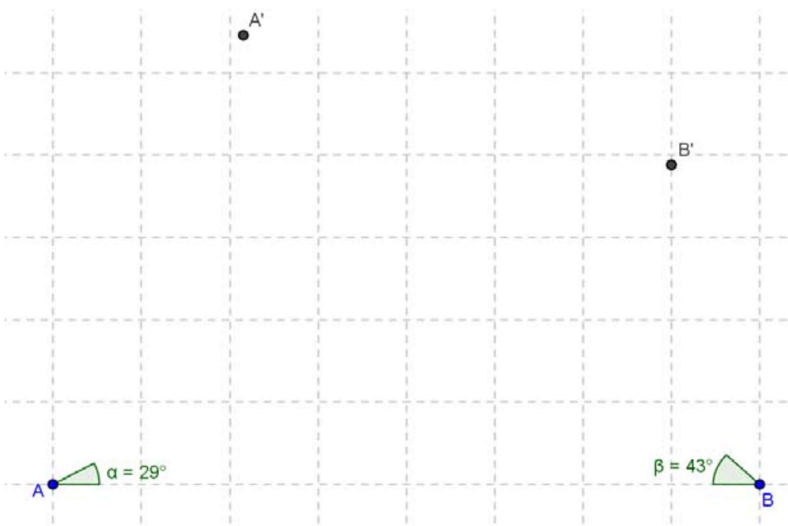


Ejemplo **_Desde dos ciudades A y B que distan 80 km. se observa un avión. Las visuales desde los puntos A y B forman ángulos de 29º y 43º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad?_**

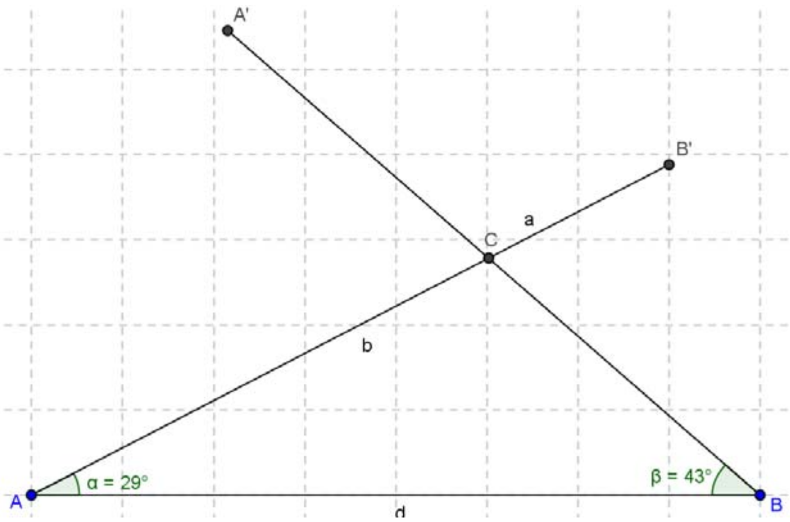
Solución 1

a) Suponemos que el avión se encuentra entre las dos ciudades.
Dibujamos los puntos A y B introduciéndolos en la campo de entrada a través de sus coordenadas, teniendo en cuenta la escala y la distancia entre ellos (es el mejor método, sobre todo cuando las distancias no son exactas). En general es preferible que los puntos no estén sobre los ejes para que sean libres y no queden ligados a moverse a lo largo de ellos. Introducimos el punto A mediante las coordenadas $A=(1,1)$ y el punto B mediante las coordenadas $B=(9,1)$. De esta manera la longitud (distancia) entre A y B es de 8 unidades, siendo la escala $1:10^6$, es decir, 1 cm. en el plano corresponde a 10^6 cm. en la realidad.
Si nos equivocamos al introducir las coordenadas de algún punto podemos cambiarlas colocando el cursor sobre él y pulsando el botón derecho del ratón. Aparecerá una ventana cuya última opción es *Propiedades*. Pulsamos sobre ella, en la ventana que se abre pulsamos en la pestaña *Básico* y en la opción *Valor* cambiamos las coordenadas del punto.

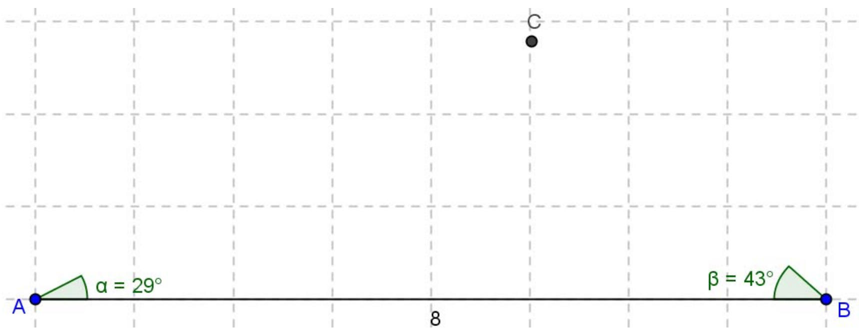
b) Seleccionamos la herramienta ***Ángulo-Amplitud***. A continuación pulsamos sobre los puntos B y A (en este sentido) y en la ventana que se abre introducimos 29º. Activamos *Sentido Antihorario*. Aparecerá dibujado en A el ángulo de 29º y además se dibuja el punto B', siendo 29º el ángulo BAB'. Volvemos a seleccionar la herramienta *Ángulo-Amplitud y* pulsamos ahora sobre los puntos A y B (en este sentido) y en la ventana que se abre introducimos 43º. Activamos *Sentido Horario*. Aparecerá dibujado en B el ángulo de 43º y además se dibuja el punto A', siendo 43º el ángulo ABA'. Arrastramos con el cursor las expresiones correspondientes a $\alpha = 29º$, $\beta = 43º$ y las letras correspondientes a los vértices A y B hasta que queden bien visibles y sin superponerse unas con otras. Tiene que verse un dibujo como éste:



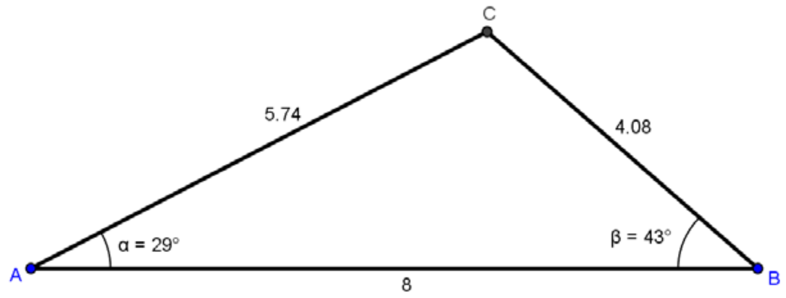
c) Trazamos los segmentos $\overline{BA'}$ y AB' y dibujamos el punto de corte con la herramienta *Intersección de Dos Objetos*. Nos aparecerá dibujado el punto C correspondiente al tercer vértice del triángulo.



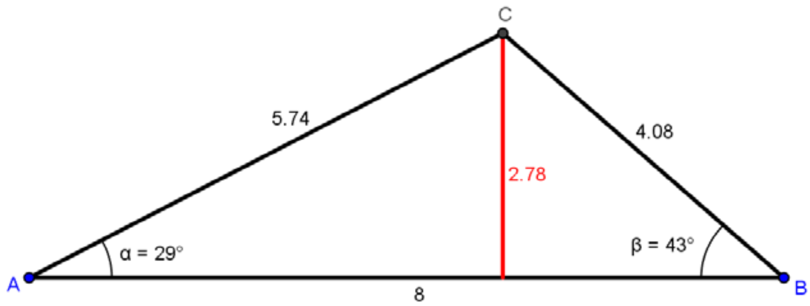
d) Para que solamente aparezcan visibles en el dibujo los vértices A, B y C así como los ángulos, colocamos el cursor encima de un elemento cualquiera del mismo y pulsamos sobre el botón derecho del ratón. Activamos *Propiedades* y en la parte izquierda de la ventana aparecen todos los *Objetos* de nuestro dibujo agrupados en los bloques *Número, Punto, Segmento y Ángulo*. Activamos la pestaña *Básico* y con la ventana *Propiedades* abierta si la movemos ligeramente podemos ver todos los elementos del dibujo que tenemos en la ventana de Gráficos. Todo aquello que queremos modificar en el dibujo lo podemos hacer desde la ventana *Propiedades*. Si queremos que no aparezca un objeto o su rótulo o queremos cambiar el grosor, estilo, etc. de cualquiera de los objetos, lo único que tenemos que hacer es seleccionarlo en su bloque correspondiente y en la pestaña adecuada cambiar las propiedades. Todo esto lo podemos hacer individualmente o seleccionando varios objetos de un bloque sin más que ir pulsando sobre cada uno de ellos. Así, por ejemplo, para que los segmentos BA' y AB' y los puntos A' y B' no aparezcan pulsamos sobre "a" y "b" en el bloque *Segmento* y sobre A' y B' en el bloque *Punto* y comprobaremos que desaparecen. ¡Ojo! No se borran, simplemente no se muestran. Si los borráramos tendríamos que pulsar sobre la opción *Borrar* que hay en la parte inferior de la ventana *Propiedades* y como consecuencia se borrarían todos los objetos dependientes de ellos.
Podemos hacer que desaparezcan todos los puntos sin más que colocar el cursor encima de la opción *Puntos* y desactivar en la pestaña *Básico* la opción *Mostrar Objetos*. Lo mismo tenemos que hacer si lo único que queremos es que no aparezcan los rótulos de determinados elementos pero sí queremos que aparezcan los objetos. En este caso, seleccionamos los objetos correspondientes y desactivamos la opción *Mostrar Rótulo* en la pestaña *Básico*. Para que aparezca la longitud del segmento AB, simplemente seleccionamos "d" en el bloque *Segmento* y en la pestaña *Básico* en la opción *Mostrar Rótulo* en la persiana que se abre seleccionamos *Valor*. *Según t*odo lo anterior, el dibujo tiene que quedar de la siguiente manera:



e) Pulsando en la herramienta *Segmento* una sola vez, unimos los vértices A con C y C con B, uno a continuación del otro. En la ventana *Propiedades* en la pestaña *Estilo* cambiamos el grosor de los segmentos y en la pestaña *Color* su color. Para los ángulos, colocamos el cursor encima del bloque *Ángulo* y en la pestaña estilo cambiamos el *Grosor del Trazo*, *Tamaño* y *Sombreado*. La distancia del avión a cada una de las ciudades se obtiene directamente sin más que activar en la pestaña *Básico* en *Muestra Rótulo* la opción *Valor* para cada uno de los segmentos.



f) Para calcular la altura a la que se encuentra el avión, trazamos la recta perpendicular desde el punto C al segmento AB y con la herramienta *Intersección de dos Objetos* obtenemos el punto D de corte. Desactivamos *Mostrar Objeto* para la recta perpendicular. Unimos mediante la herramienta *Segmento* los puntos C y D y activamos en *Mostrar Rótulo* la opción *Valor*. Obtenemos directamente la altura.

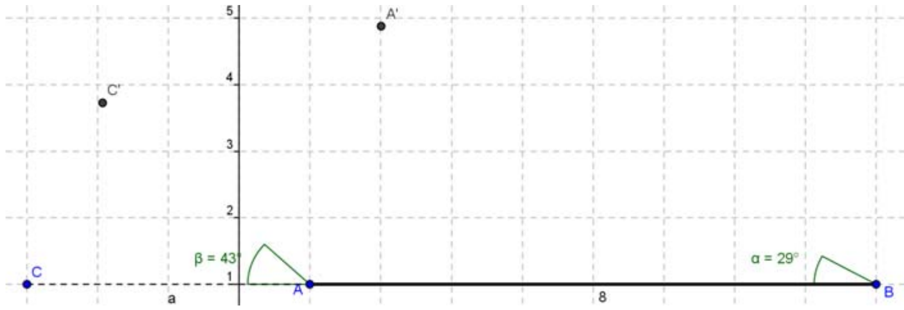


g) Según la escala, la altura es igual a $27'8\,\text{km}$ y las distancias desde el avión hasta los puntos A y B son respectivamente $57'4\,\text{km}$ y $40'8\,\text{km}$.

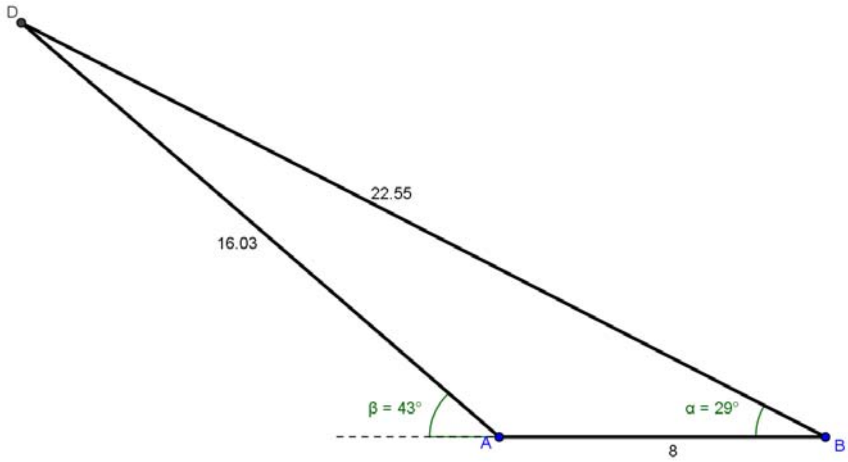
h) Si queremos calcular el área del triángulo ABC o la de cualquier otro triángulo, puesto que no lo hemos construido con la herramienta polígono, en cuyo caso nos daría el área directamente con la herramienta Área, lo que hacemos es escribir el comando **Area[A,B,C]** en la línea de entrada y el resultado lo obtendremos en la *Ventana de Álgebra*. En nuestro caso, el área del triángulo ABC es: $1112\,\text{km}^2$.

<u>*Solución 2*</u>

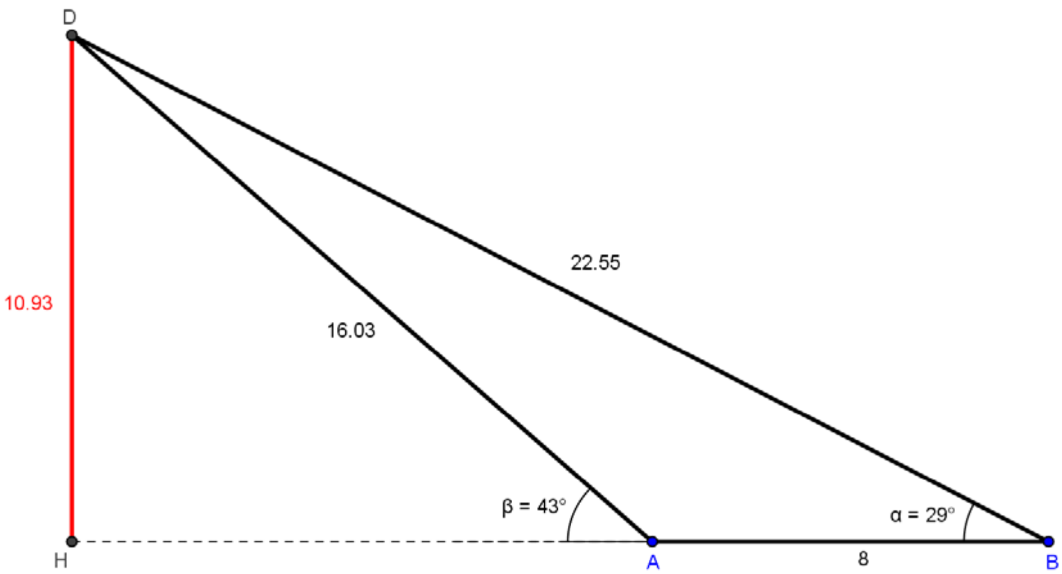
a) Suponemos que las dos ciudades se encuentran a un mismo lado del avión.
En este caso, para construir el ángulo de 43º dibujamos un punto C a la izquierda de A, por ejemplo $A=(-3,1)$ y con la herramienta ***Ángulo-Amplitud*** pulsamos sobre los puntos C y A (en este sentido) y en la ventana que se abre introducimos 43º. Activamos *Sentido Horario*. Aparecerá dibujado en A el ángulo de 43º y además se dibuja el punto C', siendo 43º el ángulo CAC'.



b) Con la herramienta *Semirrecta que pasa por Dos Puntos* trazamos las semirrectas BA′ y AC′ y obtenemos el punto D donde se cortan. Unimos los vértices y dejamos visibles solamente los vértices, los lados y los ángulos con los valores obtenidos por el programa (*Muestra Rótulo)*. Reducimos la escala del dibujo para que no salga muy grande.



c) Para calcular la altura a la que se encuentra el avión, trazamos la recta perpendicular desde el punto D a la prolongación del segmento BA (*Semirrecta que pasa por Dos Puntos*) y con la herramienta *Intersección de dos Objetos* obtenemos el punto de corte H (si nos da otro rótulo para el punto de corte lo podemos cambiar colocando el cursor encima del punto y en propiedades en *Renombra* escribimos H. Desactivamos *Mostrar Objeto* para la recta perpendicular. Unimos mediante la herramienta *Segmento* los puntos D y H y activamos en *Mostrar Rótulo* la opción *Valor*. Obtenemos directamente la altura



d) Según la escala, la altura es igual a $109'3\,\text{km}$ y las distancias desde el avión hasta los puntos A y B son respectivamente $160'3\,\text{km}$ y $225'5\,\text{km}$. El área del triángulo ABD es $4400\,\text{km}^2$

Actividad ***Dibuja un octógono regular cuyo lado mida 3 cm.***

a) Con la opción Muestra Rótulo, Nombre y Valor muestra los rótulos de los vértices y los lados.
b) Dibuja los ángulos interiores del octógono mostrando el rótulo con su valor.
c) Calcula el centro del octógono y muestra su rótulo.
d) Traza los segmentos que van desde el centro del octógono hasta dos vértices consecutivos y dibuja el ángulo central comprendido entre ellos con su rótulo. Calcula la longitud de los lados del triángulo isósceles que se forma y su área.
e) Calcula el perímetro y el área del octógono y muestra sus rótulos.
f) Dibuja la bisectriz de uno de sus ángulos interiores.

Circunferencia

Nombre e indicación	*Comando equivalente*
Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos	Circunferencia [O, A]

Al marcar un punto O y un punto A queda definida una circunferencia con centro en O que pasa por A. El radio del círculo es la distancia OA. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

Circunferencia dados su Centro y Radio	Circunferencia [O, k]

Tras marcar un punto O como centro, se muestra la ventana para ingresar el valor del radio. El punto puede crearse directamente, no es necesario que exista con anterioridad.

Segmento o Puntos extremos del Radio y luego el Centro	Circunferencia [O, k]

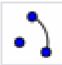
Marca segmento o dos puntos para el radio, luego el centro. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

Circunferencia dados Tres de sus puntos	Circunferencia [A, B, C]

Al marcar tres puntos A, B y C queda definida una circunferencia que pasa por esos puntos. Si los tres puntos estuvieran alineados, la circunferencia quedaría reducida a una recta. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.

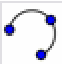
Semicircunferencia dados Dos puntos	Semicircunferencia [A, B]

Al marcar dos puntos A y B se produce una semicircunferencia con diámetro el segmento AB. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



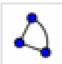
Arco de Circunferencia dados su Centro y Dos Extremos	ArcoCircular [O, A, B]

Al marcar tres puntos O, A y B se produce un arco circular con centro en O, que tiene como extremo inicial A y tiende hacia B. El punto B puede no estar en el arco. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



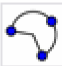
Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos	ArcoCircunferencia [A, B, C]

Al marcar tres puntos se produce un arco de circunferencia que pasa por ellos. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



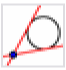
Sector Circular dados su Centro y Dos Puntos	SectorCircular [O, A, B]

Al marcar tres puntos O, A y B se produce un sector circular con centro en O, que tiene como extremo inicial A y tiende hacia B. El punto B puede no yacer en el sector. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



Sector Circular dados Tres Puntos de su arco	SectorCircunferencia [A, B, C]

Al marcar tres puntos se produce un sector de circunferencia que pasa por ellos. Los puntos pueden crearse directamente, no es necesario que existan con anterioridad.



Tangentes	Tangente [A, c]

Las tangentes a una **cónica** pueden determinarse de dos maneras:

- Al marcar un punto A y una cónica c, en cualquier orden, se crean todas las tangentes a c que pasan por A.
- Al marcar una recta r y una cónica c, en cualquier orden, se crean todas las tangentes a c que son paralelas a r.

Al marcar el punto A y la **función** f se traza la recta tangente a f por x = x(A). El punto puede crearse directamente, no es necesario que exista con anterioridad.

Distancia o Longitud	Distancia [A, B]

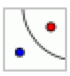
Esta herramienta calcula la *longitud de la circunferencia*.

Seleccionando el icono ***Distancia o Longitud***, cuarto por la derecha, y a continuación pulsando sobre la circunferencia se mostrará su perímetro.

Área	Área [c]

Esta herramienta ofrece el área de un círculo como texto dinámico en la Vista Gráfica. El texto se aplicará, en la Vista Gráfica, en la posición que indique el puntero al hacer clic.

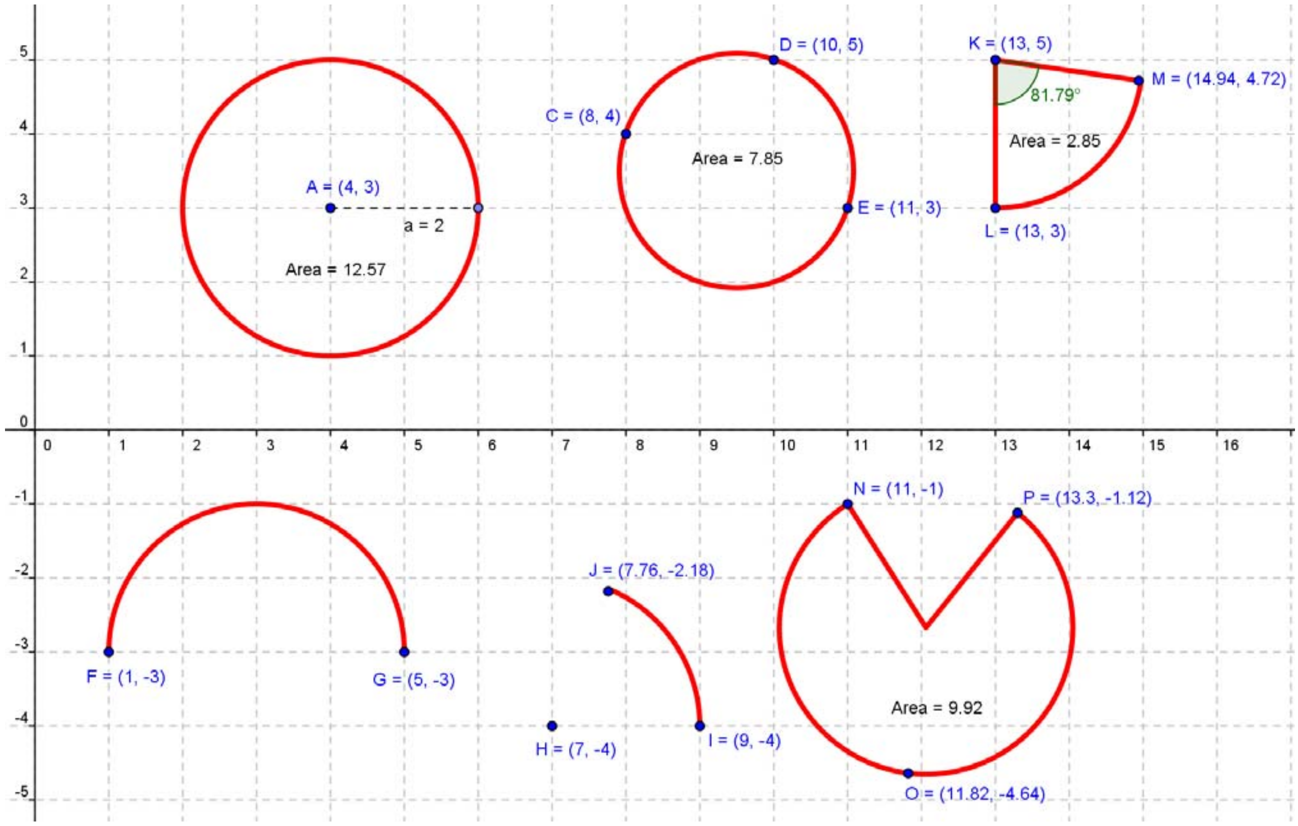
Seleccionando el icono ***Área***, cuarto por la derecha, y a continuación pulsando sobre la circunferencia se mostrará su área.



Refleja Punto en Circunferencia	Refleja [A, c]

Debe seleccionarse un punto y la circunferencia donde se reflejará (invertirá), en cualquier orden. El punto puede crearse directamente, no es necesario que exista con anterioridad.

Para dibujar el radio de la circunferencia basta con crear un punto sobre ella con la herramienta ***Nuevo Punto*** y a continuación trazar el segmento que va desde el centro hasta dicho punto.



Actividad ***Dibuja una circunferencia de radio 3 cm.***

a) Dibuja el diámetro de la circunferencia y un punto sobre ella que no coincida con los extremos del diámetro. Con la opción Muestra Rótulo, Nombre y Valor muestra los rótulos del centro y del diámetro.

b) Mediante la herramienta Polígono traza un triángulo, dos de cuyos vértices están en los extremos del diámetro y el tercer vértice es el punto dibujado sobre la circunferencia. Repite la operación con otros puntos sobre la circunferencia, teniendo siempre como vértices los extremos del diámetro. ¿Qué tipo de triángulo se forma siempre? Calcula y dibuja el ángulo correspondiente al vértice que no se encuentra en los extremos del diámetro.

c) Traza desde un punto exterior a la circunferencia las dos tangentes a la misma y dibuja el ángulo comprendido entre ellas.

Soluciones: *En mi página web http://www.telefonica.net/web2/lasrotas/Matematicas.htm si seleccionamos el icono* **GeoGebra** *que se encuentra en la parte superior y luego seleccionamos el enlace* ***Ejemplos realizados por Juan Bragado Rodríguez****, se abrirá una ventana en cuya parte superior izquierda están todas las construcciones que vienen a continuación.*

Actividad <u>***Alturas. Ortocentro de un triángulo***</u> ***(punto donde se cortan las alturas).***

a) Dibuja un triángulo cualquiera. Traza sus tres alturas y calcula el punto de corte entre ellas. Este punto se llama Ortocentro.

b) Mueve con el ratón los vértices del triángulo y observa la posición del ortocentro. Si el triángulo es rectángulo ¿en qué posición se encuentra el ortocentro? ¿y si el triángulo es isósceles o equilátero?.

c) ¿Qué condiciones debe de cumplir el triángulo para que el ortocentro se encuentre en su interior?

d) ¿De qué depende que el ortocentro se encuentre más cerca de un vértice que de los otros dos?

e) Se denomina triángulo Órtico al triángulo que se forma al unir los pies de las alturas. Comprueba que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico.

f) Traza por cada uno de los vértices del triángulo ABC una recta paralela al ladofopuesto a dicho vértice. Sean A', B' y C' los puntos de corte de estas tres rectas. Si consideramos que estos tres puntos de corte son los vértices A', B' y C' de un nuevo triángulo. ¿Existe alguna relación en- tre el circuncentro del triángulo A'B'C' y el ortocentro del triángulo ABC?

Actividad <u>***Bisectrices. Incentro de un triángulo***</u> ***(punto donde se cortan las bisectrices).***

a) Dibuja un triángulo cualquiera. Traza sus tres bisectrices y calcula el punto de corte entre ellas. Este punto se llama Incentro y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. Dibújala.

b) Mueve con el ratón los vértices del triángulo y observa la posición del incentro. ¿Es siempre un punto interior del triángulo? ¿Puede estar situado en alguno de los lados?

c) ¿Cómo son las distancias desde el Incentro a cada uno de los lados?

Actividad <u>***Mediatrices. Circuncentro de un triángulo***</u> ***(punto donde se cortan las mediatrices).***

a) Dibuja un triángulo cualquiera. Traza sus tres mediatrices y calcula el punto de corte entre ellas. Este punto se llama Circuncentro y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Dibújala.

b) Mueve con el ratón los vértices del triángulo y observa la posición del circuncentro. Si el triángulo es rectángulo ¿en qué posición se encuentra el circuncentro? ¿y si el triángulo es isósceles o equilátero?.

b) ¿Puede situarse el circuncentro sobre un un vértice? ¿Qué condiciones debe de cumplir el triángulo para que el circuncentro se encuentre en su interior?

c) ¿Que puedes decir sobre la distancia del circuncentro a los vértices del triángulo?

d) Queremos colocar un repetidor de televisión en un determinado lugar para que la señal llegue con la misma intensidad a Denia, Ondara y Pedreguer. Con la ayuda de un mapa y teniendo en cuenta la escala, mide la distancia en línea recta entre las tres ciudades y luego localiza dicho punto sobre el mapa, utilizando como herramienta de cálculo Geogebra.

e) Con la ayuda de Geogebra sitúate en un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita. Traza rectas que pasen por dicho punto y sean perpendiculares a los tres lados del triángulo. Considera los puntos donde estas tres rectas cortan a los tres lados del triángulo ¿cómo es la posición de estos tres puntos? La recta que contiene a estos tres puntos se llama Recta de Simson.

Actividad ***Medianas. Baricentro de un triángulo*** ***(punto donde se cortan las medianas).***

a) Dibuja un triángulo cualquiera. Traza sus tres medianas y calcula el punto de corte entre ellas. Este punto se llama Baricentro.
b) Mueve con el ratón los vértices del triángulo y observa la posición del Baricentro. ¿Es posible que el baricentro se encuentre fuera del triángulo? ¿Y sobre uno de los lados?.
c) ¿Qué relación existe entre las distancias desde el baricentro a un vértice y al punto medio del lado opuesto?
c) Si unimos entre sí los puntos medios de los lados del triángulo ABC, obtenemos otro triángulo cuyo Baricentro coincide con el del triángulo ABC y sus medianas miden la mitad que las de ABC. También se verifica que los lados del nuevo triángulo miden la mitad de los del original y su área es la cuarta parte del original. Compruébalo.
d) El Baricentro tiene una propiedad física importante: es el centro de gravedad del triángulo. Para comprobarlo, coge una cartulina y dibuja un triángulo cualquiera que no sea equilátero. Traza sus medianas y calcula el baricentro. Recorta el triángulo que has dibujado y pincha una aguja en su baricentro. Haz girar el triángulo como si fuera un molinillo. Repite las operaciones con tres triángulos idénticos al primero y señala en uno de ellos el circuncentro, en otro el incentro y en el otro el ortocentro. De los 4 triángulos, ¿cuál gira mejor? ¿Por qué crees que es así? Investígalo en Internet.

Actividad ***Recta de Euler*** ***(recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro).***

a) Dibuja en un triángulo cualquiera el Baricentro, el Circuncentyro y el Incentro.
b) ¿Qué relación existe entre las distancias desde el baricentro al ortocentro y al circuncentro?
c) ¿Hay algún tipo de triángulo en el cual los tres puntos coincidan? ¿y dos de ellos?
d) ¿Que sucede cuando uno de los puntos está sobre un vértice?
e) ¿Qué tiene de especial la recta de Euler en un triángulo isósceles? ¿Cómo se sitúan los puntos si el triángulo es rectángulo? ¿Existe algún triángulo que carezca de la recta de Euler?
f) Dibuja ahora el Incentro. ¿Hay algún triángulo en el que la recta de Euler pase por los 4 puntos? ¿Cómo se llama? ¿Coincidirán alguna vez los cuatro puntos?
g) Si unes los puntos medios de los lados del triángulo que has dibujado se obtiene otro triángulo A'B'C' semejante al anterior llamado Triángulo Medial. Comprueba que el circuncentro de un triángulo coincide con el ortocentro de su triángulo medial. Comprueba que los baricentros de los dos triángulos coinciden.
h) Comprueba que el circuncentro del triángulo medial es el punto medio del segmento perteneciente a la recta de Euler cuyos extremos son el ortocentro y el baricentro.