Definición de Polinomio

Expresiones Algebraicas

Expresión algebraica es toda combinación de números y letras ligados por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las expresiones algebraicas provienen de fórmulas físicas, geométricas, de economía, etc. Son expresiones algebraicas:

$$3abc \quad ; \quad 5x^2ty + 2xy \quad ; \quad 7\sqrt{xy} + z^3 \quad ; \quad \frac{x^2 - 3y}{a + b^3}$$

Las operaciones que se realizan con letras son las mismas que las realizadas con números y cumplen las mismas reglas. A continuación recordamos algunas fórmulas de magnitudes geométricas, físicas, etc., que vienen dadas por expresiones algebraicas.

- Volumen del cubo de lado **a** $\rightarrow$ $\mathbf{a^3}$
- Volumen del ortoedro de lados **a**, **b** y **c** $\rightarrow$ $\mathbf{abc}$
- Área del círculo de radio **r** $\rightarrow$ $\pi \mathbf{r^2}$
- Diagonal de un rectángulo de lados **a** y **b** $\rightarrow$ $\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$
- Área de un trapecio de bases **B**, **b** y altura **h** $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{B + b}{2} \cdot h}$
- Densidad de un cuerpo de masa **M** y volumen **V** $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{M}{V}}$

Monomios

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones con letras que intervienen son la multiplicación y la potenciación de exponente natural. *Monomio significa un término (**monos,** en griego, significa **uno**).*

Son monomios $\rightarrow$ $4xy^2 \quad ; \quad -9axzt \quad ; \quad yx^2tm^3$

No son monomios $\rightarrow$ $2ax^{-1} \quad ; \quad 3a\sqrt{x} = 3ax^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \frac{4xy^2}{7x^3z^4}$

Las fórmulas geométricas a^3, abc, πr^2, etc., son monomios.

Todo monomio está formado por:

- Una parte numérica, llamada coeficiente.
- Una ***parte literal*** *constituida por letras y sus exponentes.*

El ***grado*** de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables. El grado de un monomio respecto de una variable es el exponente de esa variable.

Ejemplo El grado del monomio $7x^2ytm^3$ es $2+1+1+3=7$ y además es de grado 2 respecto a la variable x, de grado 1 respecto a la variable y, de grado 1 respecto a la variable t y de grado 3 respecto a la variable m.

Dos monomios son ***semejantes*** *cuando tiene la misma parte literal (las letras pueden estar cambiadas de orden) y en el caso de que los monomios tengan el mismo coeficiente se dice que son* ***iguales (o equivalentes).***

Ejemplo Son semejantes los monomios $7x^2yz^3$ y $-3yx^2z^3$
No son semejantes los monomios $7x^2yz^3$ y $-7yx^2z$
Son iguales los monomios $7x^2yz^3$ y $7yx^2z^3$

Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma de dos o más monomios y puede tener una o más variables. *Polinomio significa varios términos (**polys** en griego significa **varios**).*

Son polinomios $\rightarrow$ $3x+2y$; $a^2+2ab+b^2$; x^3-3xz^4-7t

No son polinomios $\rightarrow$ $\dfrac{4x+y}{x^2}$; $\dfrac{2}{x+z}$; $\dfrac{t+y-1}{z}$

Se llama polinomio de grado n, en una indeterminada x, a toda expresión de la forma:

$$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

en la que: n es un número natural y $\mathbf{a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots\ldots, a_2, a_1, a_0}$ ***son números reales que se denominan coeficientes*** $\mathbf{a_n \neq 0}$

Es costumbre designar a los polinomios mediante las siguientes notaciones:

$$P(x), Q(x), R(x), \ldots. \qquad P(x,y), Q(x,y), \ldots.$$

indicando entre paréntesis las variables. Así, por ejemplo, diremos:

el polinomio $P(x)=5x^3+x+1$, o bien: el polinomio $Q(x)=x^6-2$

Características

- ✓ Cada uno de los monomios que componen el polinomio se llama término. El coeficiente a_0 se llama término independiente. Los polinomios que sólo constan de uno, dos o tres términos se llaman **monomios, binomios** o **trinomios**, respectivamente.
- ✓ En general escribiremos los polinomios ordenados según potencias decrecientes de la variable.
- ✓ El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que lo forman. El grado de un polinomio respecto de una variable es el mayor exponente con que figura dicha variable.

- ✓ $2x^3y - 5xy^2 + x - 1$ es de grado 4
- ✓ $3xy^2 + 4xy^2 + 7xy - 5x^3 + z - 3$ de grado 2 respecto de y, de grado 1 respecto de z y de grado 3 respecto de x.
- ✓ Un polinomio se dice completo cuando existen términos de todos los grados desde 0 hasta el mayor.
- ✓ $7x^5 - 5x^4 + 23x - 7 + 11x^3 + 45x^2$ es un polinomio completo
- ✓ Un polinomio se dice ordenado respecto de una variable cuando los grados de los términos van creciendo o decreciendo.
- ✓ $7x^5 - 5x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 23x - 7$ es decreciente
- ✓ $-7 + 23x + 45x^2 + 11x^3 - 5x^4 + 7x^5$ es creciente
- ✓ Un número real distinto de cero es un polinomio que únicamente tiene término independiente y se dice que el grado de estos polinomios es cero.
- ✓ Dos polinomios son iguales cuando son equivalentes o cuando los términos que lo forman son iguales.

Valor numérico de un polinomio

Dado un polinomio $\mathbf{P(x)}$ y un número a, se llama valor numérico de $\mathbf{P(x)}$ para $\mathbf{x = a}$ al número que se obtiene al sustituir x por a y efectuar las operaciones indicadas. Dicho valor numérico se designa mediante la notación $\mathbf{P(a)}$.

Ejemplo **Calcular el valor numérico del polinomio $\mathbf{P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1}$ para $\mathbf{x = -1}$.**

$$P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -10$$

Ejemplo **Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = x^2 + 3x + 1}$ determinar $\mathbf{P(0), P\left(\frac{1}{2}\right)}$ y $\mathbf{P(2a)}$**

$$P(0) = 0^2 + 3\cdot 0 + 1 = 1 \qquad P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{4}$$

$$P(2a) = (2a)^2 + 3\cdot 2a + 1 = 4a^2 + 6a + 1$$

Ejemplo **Averiguar el valor de k en el polinomio $\mathbf{P(x) = x^4 - 3x^3 + kx - 1}$ para que $\mathbf{P(2) = 3}$.**

$$P(2) = 2^4 - 3\cdot 2^3 + 2k - 1 = 3 \;\rightarrow\; 16 - 24 + 2k - 1 = 3 \;\rightarrow\; k = 6$$

Operaciones con Polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar dos o más polinomios, se suman o restan los coeficientes de los términos del mismo grado.

Para realizar la suma o resta de polinomios se disponen los polinomios uno sobre otro, haciendo coincidir los términos del mismo grado en la misma vertical, dejando huecos si es necesario, y sumando entonces los coeficientes.

Ejemplo **Calcular $\mathbf{P(x)+Q(x)}$ y $\mathbf{P(x)-Q(x)}$ siendo:**

$$\mathbf{P(x)=2x^4-7x^3-4x+5 \quad y \quad Q(x)=x^5+6x^4+2x^3-5x^2+3}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
P(x)= & & 2x^4 & -7x^3 & & -4x & +5 \\
Q(x)= & x^5 & +6x^4 & +2x^3 & -5x^2 & & +3 \\
\hline
P(x)+Q(x)= & x^5 & +8x^4 & -5x^3 & -5x^2 & -4x & +8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
P(x)= & & 2x^4 & -7x^3 & & -4x & +5 \\
-Q(x)= & -x^5 & -6x^4 & -2x^3 & +5x^2 & & -3 \\
\hline
P(x)-Q(x)= & -x^5 & -4x^4 & -9x^3 & +5x^2 & -4x & +2
\end{array}$$

Ejemplo **Si $\mathbf{P(x)=2x^3-5x^2+2x-1}$, $\mathbf{Q(x)=-x+1}$ y $\mathbf{R(x)=x^4-3x^3+6x-1}$, calcular:**

a) $\mathbf{P(x)+Q(x)-R(x)}$ b) $\mathbf{R(x)-Q(x)}$.

a)

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^3-5x^2+2x-1 \\
 & \qquad\qquad -x+1 \\
\hline
P(x)+Q(x)= & 2x^3-5x^2+x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & \qquad\quad 2x^3-5x^2+x \\
 & -x^4+3x^3 \qquad\quad -6x+1 \\
\hline
P(x)+Q(x)-R(x)= & -x^4+5x^3-5x^2-5x+1
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl}
 & x^4-3x^3 \qquad +6x-1 \\
 & \qquad\qquad\quad +x-1 \\
\hline
R(x)-Q(x)= & x^4-3x^3 \qquad +7x-2
\end{array}$$

Problemas propuestos con soluciones

1) **Dados los polinomios $P(x)=x^3-x^2-3x+1$, $Q(x)=2x^2-2x+1$ y $R(x)=x^3-6x^2+6x-1$ calcular:**

a) $P(x)+Q(x)$ **b)** $P(x)-Q(x)+R(x)$ **c)** $2P(x)-3R(x)$ **d)** $P(x)+Q(x)-R(x)$

Soluciones

a) x^3+x^2-5x+2 b) $2x^3-9x^2+5x-1$ c) $-x^3+16x^2-24x+5$ d) $7x^2-11x+3$

2) **Opera y simplifica:**

a) $(2x+3x^2-7x^3)+(1+4x-5x^2+9x^3-4x^4)$ **b)** $2+x+3x^2-(9-5x+23x^2)$

Soluciones

a) $-4x^4+2x^3-2x^2+6x+1$ b) $-20x^2+6x-7$

Producto de polinomios

El producto de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y reduciendo luego los términos semejantes.

Para realizar el producto de polinomios se disponen los polinomios uno sobre otro, haciendo coincidir los términos del mismo grado en la misma vertical, dejando huecos cuando falta algún término.

Ejemplo **Calcular $P(x)\cdot Q(x)$ si $P(x)=-x^5-6x^4-2x^3+5x^2-3$ y $Q(x)=2x^4-7x^3-4x+5$**

$P(x)=$					$-x^5$	$-6x^4$	$-2x^3$	$+5x^2$		-3
$Q(x)=$						$+2x^4$	$-7x^3$		$-4x$	$+5$
					$-5x^5$	$-30x^4$	$-10x^3$	$+25x^2$		-15
				$+4x^6$	$+24x^5$	$+8x^4$	$-20x^3$		$+12x$	
		$+7x^8$	$+42x^7$	$+14x^6$	$-35x^5$		$+21x^3$			
	$-2x^9$	$-12x^8$	$-4x^7$	$+10x^6$		$-6x^4$				
$P(x)\cdot Q(x)=$	$-2x^9$	$-5x^8$	$+38x^7$	$+28x^6$	$-16x^5$	$-28x^4$	$-9x^3$	$+25x^2$	$+12x$	-15

Ejemplo **Calcular $P(x)\cdot Q(x)-R(x)$ siendo**
$P(x)=x^3-x^2-3x+1$, $Q(x)=2x^2-2x+1$ y $R(x)=x^3-6x^2+6x-1$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^3 \quad - x^2 - 3x + 1 \\ -2x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 2x \quad \\ 2x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \quad\quad \\ \hline P(x)\cdot Q(x) = 2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1 \\ - x^3 + 6x^2 - 6x + 1 \\ \hline P(x)\cdot Q(x) - R(x) = 2x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 11x + 2 \end{array}$$

Problemas propuestos con soluciones

1) Dados los polinomios $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 2x^2 - 2x + 1$ y $R(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ calcular:

a) $Q(x)[2P(x) - R(x)]$ b) $[P(x)]^2$ c) $[Q(x)]^2 - P(x)R(x)$

Soluciones

a) $2x^5 + 6x^4 - 31x^3 + 34x^2 - 18x + 3$ b) $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
c) $-x^6 + 7x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 31x^2 - 13x + 2$

2) Opera y simplifica: a) $(2x^3 - x + 5)(x - 3)$ b$(x^2 - 5)(2x^3 - 4)$ c) $(x^2 - 5x + 3)(4x - 5)$ d) $(4x^2 - 9x + 1)(7x - 2)$

Soluciones

a) $2x^4 - 6x^3 - x^2 + 8x - 15$ b) $2x^5 - 10x^3 - 4x^2 + 20$ c) $4x^3 - 25x^2 + 37x - 15$
d) $28x^3 - 71x^2 + 25x - 2$

3) Opera y simplifica: $\left(\frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4}\right)\left(2x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{4}{3}\right)$

Solución
En los casos donde intervienen fracciones, lo más práctico es multiplicar cada término del primer paréntesis, con su signo, por todos los términos del otro paréntesis (con sus signos respectivos) expresando el resultado en una línea (este procedimiento es el más práctico).

$$\left(\frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4}\right)\left(2x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{4}{3}\right) =$$

$$\frac{3x^2}{2}\cdot 2x^2 + \frac{3x^2}{2}\cdot\frac{3x}{4} + \frac{3x^2}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 2x\cdot 2x^2 - 2x\cdot\frac{3x}{4} - 2x\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot 2x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) =$$

$$\frac{6x^4}{2}+\frac{9x^3}{8}-\frac{12x^2}{6}-4x^3-\frac{6x^2}{4}+\frac{8x}{3}+\frac{2x^2}{4}+\frac{3x}{16}-\frac{4}{12}=$$

Simplificando:

$$3x^4+\frac{9x^3}{8}-2x^2-4x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{8x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{16}-\frac{1}{3}$$

Agrupando términos:

$$3x^4+\frac{9x^3-32x^3}{8}+\frac{-4x^2-3x^2+x^2}{2}+\frac{128x+9x}{48}-\frac{1}{3}=3x^4-\frac{23}{8}x^3-3x^2+\frac{137}{48}x-\frac{1}{3}$$

4) Opera y simplifica:

a) $\mathbf{3x^2\left(2x^2+3x-\frac{4}{3}\right)}$ **b)** $\mathbf{-\frac{2x}{5}\left(-\frac{5x^3}{4}-4x^2+\frac{10}{3}\right)}$ **c)** $\mathbf{\left(2x^2-\frac{3x}{2}\right)\left(3x^2+4x-1\right)}$

d) $\mathbf{\left(\frac{4x^2}{3}+x\right)\left(-\frac{x^2}{2}+2x+3\right)}$ **e)** $\mathbf{\left(-\frac{3}{2}x^2+4x\right)\left(\frac{4}{3}x^2+x+2\right)}$

<u>Soluciones</u>

a) $6x^4+9x^3-4x^2$ b) $\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{5}x^3-\frac{4}{3}x$ c) $6x^4+\frac{7}{2}x^3-8x^2+\frac{3}{2}x$

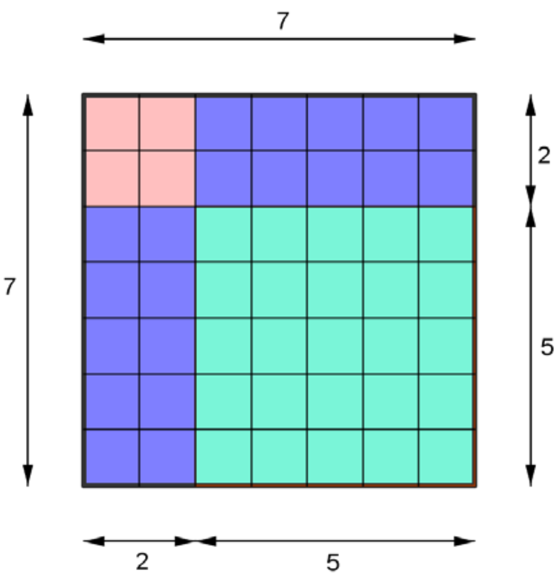
d) $-\frac{2}{3}x^4+\frac{13}{6}x^3+6x^2+3x$ e) $-2x^4+\frac{23}{6}x^3+x^2+8x$

Productos o Identidades Notables

Se llaman productos o identidades notables a ciertas expresiones algebraicas que nos encontramos frecuentemente en matemáticas y que <u>conviene conocer su desarrollo sin necesidad de hacerlo paso a paso</u>.

Binomio al cuadrado o cuadrado de la suma de dos cantidades

El área del cuadrado exterior es $7\times7=49$



Este cuadrado, de dimensiones 7×7, lo podemos descomponer, como si de las piezas de un puzzle se tratara, en dos cuadrados distintos (colores naranja y verde) y dos rectángulos iguales (color azul), todos ellos con un vértice en común.

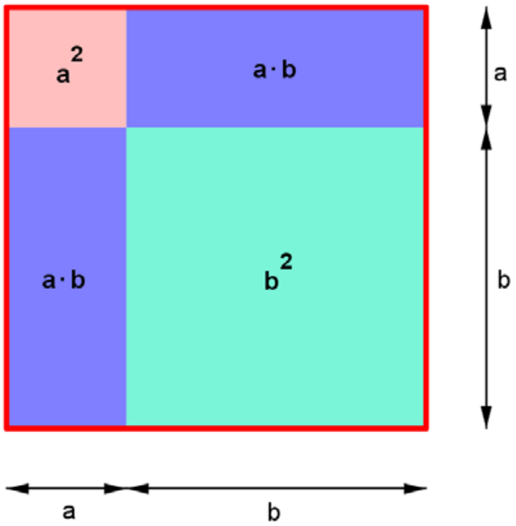
Uno de los cuadrados tiene de lado 2, el otro cuadrado tiene de lado 5 y los dos rectángulos tienen por lados 2 y 5, como se observa en el dibujo que hay en la parte derecha.

Todo lo anterior lo podemos expresar mediante la igualdad:

$$7\times 7=(5+2)(5+2)=5\cdot 5+5\cdot 2+2\cdot 5+2\cdot 2=5^2+2(2\cdot 5)+2^2=49$$

Generalización

Si tenemos un cuadrado de lado $a+b$ podemos descomponerlo en dos cuadrados y dos rectángulos. Un cuadrado de lado "a", otro cuadrado de lado "b" y dos rectángulos iguales de lados "a" y "b". De la figura adjunta deducimos la siguiente expresión:



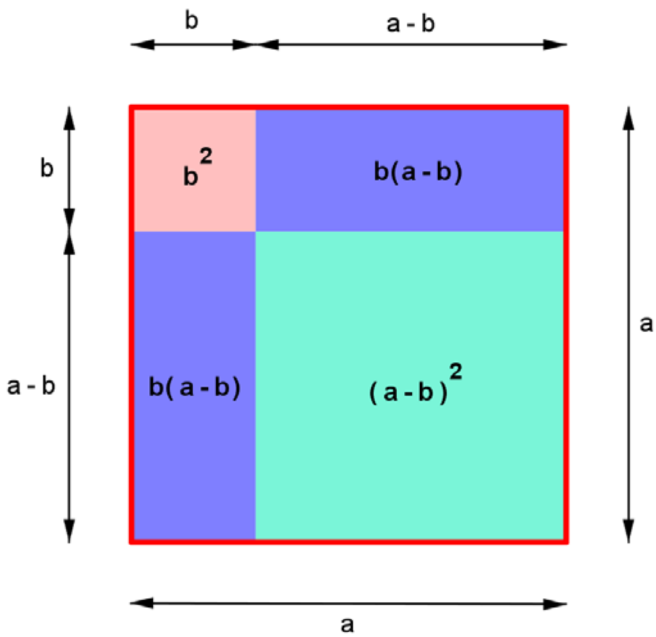
$$\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Ejemplo $\mathbf{(2+x)^2}=2^2+2\cdot 2\cdot x+x^2=4+4x+x^2$

Ejemplo $\left(\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{x}{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{2x}{6}+\frac{x^2}{9}=\frac{1}{4}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}$

Binomio al cuadrado o cuadrado de la diferencia de dos cantidades

Si tenemos un cuadrado de lado "a" podemos descomponerlo en dos cuadrados y dos rectángulos. Un cuadrado de lado "b", otro cuadrado de lado "$a-b$" y dos rectángulos iguales de lados "$a-b$" y "b".



De la figura adjunta deducimos la siguiente expresión:

$$a^2=b^2+2b(a-b)+(a-b)^2$$

$$a^2=b^2+2ab-2b^2+(a-b)^2=(a-b)^2+2ab-b^2$$

Despejando $(a-b)^2$ obtenemos:

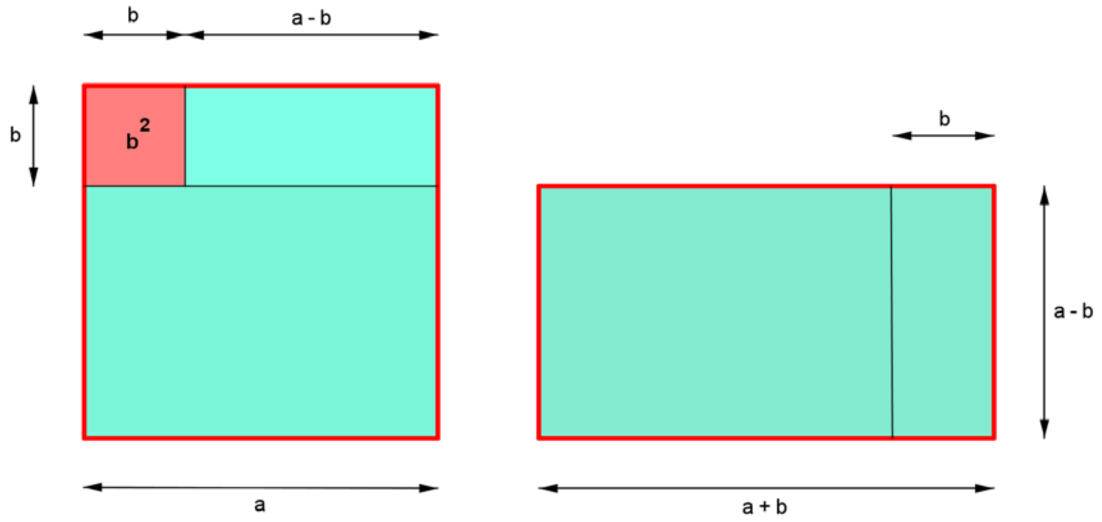
$$\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Ejemplo $\mathbf{(2-x)^2}=2^2-2\cdot 2\cdot x+x^2=2-4x+x^2$

Ejemplo $\left(\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{2x}{6}+\frac{x^2}{9}=\frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}$

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades. Diferencia de cuadrados

Partiendo de un cuadrado de lado “a” veamos cuál es el área que resulta al eliminar de este cuadrado un cuadrado de lado “b”.



Como se observa en la figura superior, el área del rectángulo de la derecha es igual al área del cuadrado de la izquierda de lado “a” menos el área del cuadrado más pequeño de lado “b”.

$$\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Ejemplo $\mathbf{(2+x)(2-x)}=2^2-x^2=4-x^2$

Ejemplo $\left(\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\right)\left(\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{x}{3}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{9}$

Resumen

Al elevar un binomio al cuadrado se verifica:

- *Los cuadrados correspondientes al primer y segundo término siempre son positivos.*
- *Si los dos términos del binomio son positivos o los dos son negativos, el término correspondiente al doble del producto del primer término por el segundo término siempre es positivo.*
- *Si uno de los dos términos es negativo y el otro es positivo, el término correspondiente al doble del producto del primer término por el segundo término siempre es negativo.*

$$\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2} \qquad \mathbf{(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2} \qquad \mathbf{(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Problemas resueltos

Ejemplo $\left(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Ejemplo $\left(\mathbf{2}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2 = 4 + 12\sqrt{5} + 9\cdot 5 = 4 + 12\sqrt{5} + 45 = 49 + 12\sqrt{5}$

Ejemplo $\left(\sqrt{\mathbf{3}}-\sqrt{\mathbf{2}}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

Ejemplo $\left(\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{2}\right)\left(\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{2}\right) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$

Ejemplo $(\mathbf{2n}-\mathbf{3})^2 = (2n)^2 - 2\cdot 2n\cdot 3 + (3)^2 = 4n^2 - 12n + 9$

Ejemplo $(\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})^2 = (5\sqrt{2})^2 - 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 25\cdot 2 - 20\sqrt{6} + 4\cdot 3 = 62 - 20\sqrt{6}$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + x^2 = \frac{1}{4} + x + x^2$

Ejemplo $\left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}\,y}{2} + \frac{y^2}{4}$

Ejemplo $(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}})(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\mathbf{x}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{x}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{4} - x^2$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)^2 = \left(\frac{3x}{5}\right)^2 - 2\cdot\frac{3x}{5}\cdot\frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{9x^2}{25} - 2x + \frac{25}{9}$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9x^2}{4} - \frac{4}{9}$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4}y + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$

Ejemplo $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}+a\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a^2 = \frac{1}{4} - a^2$

Ejemplo $\left(\mathbf{4x}^2+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\mathbf{y}\right)\left(\mathbf{4x}^2-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\mathbf{y}\right) = \left(4x^2\right)^2 - \left(\frac{5}{2}y\right)^2 = 16x^4 - \frac{25}{4}y^2$

Ejemplo **Transformar las siguientes expresiones en cuadrado perfecto.**

a) $\mathbf{x^2-6x+9}$ **b)** $\mathbf{4x^2-12x+0}$ **c)** $\mathbf{\frac{x^2}{4}-x+1}$

a) $x^2-6x+9=(x-3)^2$ b) $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$ c) $\frac{x^2}{4}-x+1=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

Ejemplo **Expresa como una identidad o producto notable las siguientes expresiones:**

a) $\mathbf{x^2-4}$ **b)** $\mathbf{9x^2-9}$ **c)** $\mathbf{81x^2-1}$ **d)** $\mathbf{49x^2-14x+1}$ **e)** $\mathbf{x^2-4y^2}$

f) $\mathbf{a^6-b^4}$ **g)** $\mathbf{16a^2-25a^2b^4}$ **h)** $\mathbf{100a^2-1}$ **i)** $\mathbf{x^2-2}$ **j)** $\mathbf{9x^4-16x^2}$

a) $(x+2)(x-2)$ b) $(3x-3)(3x+3)$ c) $(9x+1)(9x-1)$ d) $(7x-1)^2$

e) $(x+2y)(x-2y)$ f) $(a^3+b^2)(a^3-b^2)$ g) $(4a+5ab^2)(4a-5ab^2)$

h) $(10a+1)(10a-1)$ i) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ j) $(3x^2+4x)(3x^2-4x)$

Ejemplo **Calcula el área de un cuadrado cuyo lado mide** $\mathbf{\sqrt{3}+2}$

$$A=(\sqrt{3}+2)^2=(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$$

Ejemplo **Calcula el área de un rectángulo cuyos lados miden** $\mathbf{\sqrt{2}+1}$ **y** $\mathbf{\sqrt{2}-1}$

$$A=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1^2=2-1=1$$

Ejemplo **Calcula el área de un triángulo cuya base mide** $\mathbf{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **y cuya altura mide** $\mathbf{5+\sqrt{3}}$**.**

$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{2}=\frac{5-3}{2}=1$$

División de polinomios

La división entera de dos polinomios sigue el mismo proceso que la división de números naturales. Dados dos polinomios, **dividendo** y **divisor** (no nulo), se trata de hallar otros dos, **cociente** y **resto**, con las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{D(x)} & \mathbf{d(x)} \\ \cline{2-2} \mathbf{R(x)} & \mathbf{C(x)} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

1º) dividendo = divisor · cociente + resto

2º) grado $\mathbf{R(x) < grado\ d(x)}$

Si en una división de polinomios el resto es cero, se dice que la división es exacta.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{D(x)} & \mathbf{d(x)} \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & \mathbf{C(x)} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D(x) = d(x) \cdot C(x)}$$

dividendo = divisor · cociente

El proceso para calcular el polinomio cociente y resto lo analizamos a través de dos ejemplos, teniendo en cuenta que *<u>hay que ordenar los polinomios dividendo y divisor en orden decreciente de sus exponentes y dejando en el dividendo los huecos correspondientes a los términos que no existan.</u>*

<u>Ejemplo</u> **Calcular el cociente y resto de dividir los polinomios** $\mathbf{(x^4 - 8x^2 + 2x - 5) : (x - 2)}$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -8x^2 & +2x & -5 & x-2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & & & & x^3 + 2x^2 - 4x - 6 \\ \cline{1-2}
 & 2x^3 & -8x^2 & & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4x^2 & +2x & & \\
 & & 4x^2 & -8x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & -5 & \\
 & & & +6x & -12 & \\ \cline{4-5}
 & & & & -17 &
\end{array}$$

1) Se divide el monomio x^4 por el monomio x. El resultado x^3 se multiplica por el divisor y el producto *<u>se resta</u>* del dividendo.

2) Se divide $2x^3$ por x. El resultado, $2x^2$, se multiplica por el divisor y el producto se resta del nuevo dividendo, y así sucesivamente.

3) El proceso finaliza cuando el grado del polinomio del resto es menor que el grado del polinomio del divisor.

Ejemplo **Calcular el cociente y resto de dividir los polinomios $(x^3 - x):(x^2 - 1)$.**

$$
\begin{array}{rr|l}
x^3 & -x & x^2-1 \\ \cline{3-3}
-x^3 & +x & x \\ \cline{1-2}
0 & 0 &
\end{array}
$$

El cociente es $c(x) = x$ y el resto es $r(x) = 0$, por lo tanto la división es exacta.

Ejemplo **Calcular el cociente y resto de dividir los polinomios $(4x^6 - 3x^3 + 2):(x^3 - 4)$.**

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^6 & -3x^3 & +2 & x^3-4 \\ \cline{4-4}
-4x^6 & +16x^3 & & 4x^3+13 \\ \cline{1-2}
 & 13x^3 & +2 & \\
 & -13x^3 & +52 & \\ \cline{2-3}
 & & 54 &
\end{array}
$$

El cociente es $c(x) = 4x^3 + 13$ y el resto es $r(x) = 54$.

Ejemplo **Efectuar la división: $(x^6 + 2x^5 - 3x^3 - x^2):(x^2 + x + 1)$.**

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 + 2x^5 \qquad - 2x^3 - x^2 & x^2 + x + 1 \\ \hline
-x^6 - x^5 - x^4 & x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
\quad x^5 - x^4 - 2x^3 & \\
\quad -x^5 - x^4 - x^3 & \\
\qquad -2x^4 - 3x^3 - x^2 & \\
\qquad +2x^4 + 2x^3 + 2x^2 & \\
\qquad\qquad -x^3 + x^2 & \\
\qquad\qquad +x^3 + x^2 + x & \\
\qquad\qquad\quad 2x^2 + x & \\
\qquad\qquad\quad -2x^2 - 2x - 2 & \\
\qquad\qquad\qquad -x - 2 &
\end{array}
$$

El cociente es $c(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$ y el resto es $r(x) = -x - 2$.

Problemas propuestos con soluciones

Calcular el resto y el cociente de las divisiones siguientes:

a) $\mathbf{x^3+1}$ **entre** $\mathbf{x+1}$ **b)** $\mathbf{x^5-1}$ **entre** $\mathbf{x-1}$ **c)** $\mathbf{2x^3-7x^2+4x-3}$ **entre** $\mathbf{x-3}$.

d) $\mathbf{x^2-\frac{4}{3}x+1}$ **entre** $\mathbf{x-\frac{1}{3}}$ **e)** $\mathbf{(x^4-6x^3+4x^2+5x+6):(x+4)}$

f) $\mathbf{6x^4-4x^3+11x^2-4x-5}$ **por** $\mathbf{3x^2-2x-1}$

Soluciones

a) $c(x)=x^2-x+1 \quad r(x)=0$ b) $c(x)=x^4+x^3+x^2+x+1 \quad r(x)=0$

c) $c(x)=2x^2-x+1 \quad r(x)=0$ d) $c(x)=x-1 \quad r(x)=\frac{2}{3}$

e) $c(x)=x^3-10x^2+44x-171 \quad r(x)=690$ f) $c(x)=2x^2+\frac{13}{3} \quad r(x)=\frac{14}{3}x-\frac{2}{3}$