



## Operaciones con Fracciones

### Reducción de fracciones

➤ Fracciones con igual denominador: De dos fracciones que tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.  $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$

➤ Fracciones con igual numerador: De dos fracciones que tienen el mismo numerador es menor la que tiene mayor denominador.  $\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$

➤ Fracciones con numeradores y denominadores distintos: En este caso, lo primero que tenemos que conseguir es que todas las fracciones tengan el mismo denominador.

⇒ El denominador común es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores. Se obtiene descomponiendo éstos en factores y multiplicando los factores comunes por los no comunes elevados al mayor exponente.

⇒ Los numeradores de cada fracción se obtienen dividiendo el denominador común entre cada uno de los denominadores y multiplicando el resultado por el numerador correspondiente.

**Ejemplo** Comparar y ordenar las fracciones  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{4}$  y  $\frac{3}{10}$

Descomponemos en factores los denominadores.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \rightarrow 6 = 2 \cdot 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \rightarrow 4 = 2^2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \rightarrow 10 = 2 \cdot 5 \\ 1 & \end{array}$$

Si observamos la descomposición en factores de los números 6, 4 y 10, vemos que hay un factor común, el 2, que está repetido en todas las descomposiciones, pero es  $2^2$  el que tiene el mayor exponente. Los factores no comunes, es decir, los números que no están repetidos en todas las descomposiciones son el 3 y el 5, por lo tanto el mínimo común múltiplo de 6, 4 y 10 es:

$$\text{m.c.m.}(6, 4, 10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Los numeradores de cada una de las fracciones se obtienen dividiendo 60 entre cada uno de los denominadores y multiplicando el resultado por cada uno de los numeradores.

$$\frac{60}{6} \cdot 5 = 50 \quad \frac{60}{4} \cdot 7 = 105 \quad \frac{60}{10} \cdot 3 = 18$$

Las fracciones equivalentes son:  $\frac{5}{6} \rightarrow \frac{50}{60}$      $\frac{7}{4} \rightarrow \frac{105}{60}$      $\frac{3}{10} \rightarrow \frac{18}{60}$

Al comparar las tres fracciones que ahora tienen el mismo denominador obtenemos el siguiente orden:



$$\frac{18}{60} < \frac{50}{60} < \frac{105}{60} \Rightarrow \frac{3}{10} < \frac{5}{6} < \frac{7}{4}$$

### Suma y Resta de fracciones que tienen el mismo denominador

El resultado de sumar (restar) varias fracciones que tienen el mismo denominador es otra fracción que tiene por denominador común el mismo y por numerador la suma (resta) de los numeradores, teniendo en cuenta el signo de cada una de ellas. Las siguientes expresiones son equivalentes:

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} \quad \text{ya que} \quad - = \frac{-}{+} = \frac{+}{-}$$

Según lo anterior, un signo menos delante de una fracción equivale a cambiar el signo del numerador o del denominador. Si en el numerador hay varios sumandos hay que cambiar el signo a todos ellos. El signo negativo que había delante de la fracción se convierte en positivo (cuando es una fracción aislada no hace falta escribirlo).

#### Importante

$$-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$-\frac{3-a}{5} = +\frac{-3+a}{5}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{x-3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{-x+3}{5}$$

**¡ATENCIÓN!**

$$-\frac{3-a}{5} \quad \text{NO es igual a} \quad +\frac{-3-a}{5}$$

$$-\frac{3-a}{5} \quad \text{SÍ es igual a} \quad +\frac{-3+a}{5}$$

#### Ejemplos

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3-7+1}{5} = \frac{-3}{5}$$

$$-\frac{2}{13} - \frac{7}{13} + \frac{15}{13} = \frac{-2-7+15}{13} = \frac{6}{13}$$

### Suma y Resta de fracciones que tienen distinto denominador

Ejemplo Calcular  $\frac{3}{3} - \frac{5}{8} + \frac{4}{9}$

Descomponemos en factores los denominadores. El denominador común es  $2^3 \cdot 3^2$ .

$$\text{m.c.m.}(3, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 8 = 2^3$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 9 = 3^2$$

Los numeradores de las fracciones equivalentes se obtienen dividiendo el m.c.m. (72) entre los denominadores de cada una de ellas (3, 8 y 9) y multiplicando el resultado por los numeradores correspondientes (3, 5 y 4).



$$\frac{72}{3} \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$$

$$\frac{72}{8} \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45 \quad \longrightarrow \quad \frac{3}{3} - \frac{5}{8} + \frac{4}{9} = \frac{72 - 45 + 8}{72} = \frac{35}{72}$$

$$\frac{72}{9} \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$$

**Ejemplo** Calcular  $5 + \frac{1}{5} - \frac{5}{21} + \frac{7}{9} - \frac{3}{35}$

Escribimos el 5 en forma de fracción  $\frac{5}{1} + \frac{1}{5} - \frac{5}{21} + \frac{7}{9} - \frac{3}{35}$

Descomponemos en factores los denominadores. El denominador común es  $7 \cdot 5 \cdot 3^2$ , ya que el exponente de  $3^2$ , que es 2, es mayor que el exponente de 3, que es 1.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \rightarrow 21 = 3 \cdot 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \rightarrow 9 = 3^2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \rightarrow 35 = 7 \cdot 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{m.c.m}(5, 21, 9, 35) = 7 \cdot 5 \cdot 3^2 = 315$$

$$\frac{5}{1} + \frac{1}{5} - \frac{5}{21} + \frac{7}{9} - \frac{3}{35} = \frac{1575 + 63 - 75 + 245 - 27}{315} = \frac{1781}{315}$$

### Multipliación de Fracciones

Para multiplicar una fracción  $\frac{a}{b}$  por otra fracción  $\frac{c}{d}$  se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

### Ejemplo

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 5 \cdot 7} \quad \text{Simplificando por 3} \quad \frac{8}{3^2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{16}{105}$$

### División de Fracciones

Para dividir una fracción  $\frac{a}{b}$  por otra fracción  $\frac{c}{d}$ , se multiplica la fracción  $\frac{a}{b}$  por la inversa de la fracción  $\frac{c}{d}$  (la inversa de  $\frac{c}{d}$  es  $\frac{d}{c}$ ) o lo que es lo mismo se multiplican en cruz los términos de las fracciones.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

### Ejemplo

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{5} = \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 2} \quad \text{Simplificando por 2} \quad \frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 2} = \frac{2^3 \cdot 5}{9 \cdot 2} = \frac{2^2 \cdot 5}{9} = \frac{20}{9}$$



## Potenciación de Fracciones

Para calcular la potencia de una fracción se elevan el numerador y el denominador al exponente de la potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Para elevar un producto de fracciones a una potencia se eleva cada fracción a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \frac{a^n \cdot c^n}{b^n \cdot d^n}$$

Para elevar una fracción a un exponente negativo se eleva la fracción inversa al exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

La potencia de una potencia de una fracción es igual a la fracción elevada al producto de los exponentes.

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

## Ejemplos

$$\text{a) } \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{8^3}{9^3} \quad \text{b) } \left(\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 7}\right)^3 = \frac{8^3 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 7^3} \quad \text{c) } \left(\frac{3 \cdot x}{9 \cdot y}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot x^3}{9^3 \cdot y^3} \quad \text{d) } \left(\frac{5+x}{9}\right)^2 = \frac{(5+x)^2}{9^2}$$

**¡ATENCIÓN!**

$$(5+x)^2 \text{ NO es igual a } 5^2 + x^2$$

$$(5+x)^2 \text{ SÍ es igual a } (5+x)(5+x) = 5^2 + x^2 + 10x$$

$$\text{d) } \left(\left(\frac{8}{9}\right)^3\right)^5 = \left(\frac{8}{9}\right)^{3 \cdot 5} = \left(\frac{8}{9}\right)^{15} = \frac{8^{15}}{9^{15}} \quad \text{e) } \left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{9^3}{8^3}$$

## Operaciones combinadas

Por orden de prioridad, si hay paréntesis suele ser conveniente resolverlos en primer lugar, luego las potencias, productos, cocientes y finalmente las sumas y restas.

**¡ATENCIÓN!**

$$3 - 5 \cdot \frac{2}{7} \text{ NO es igual a } 2 \cdot \frac{2}{7}$$

$$3 - 5 \cdot \frac{2}{7} \text{ SÍ es igual a } 3 - \frac{5 \cdot 2}{7} = 3 - \frac{10}{7} = \frac{21 - 10}{7} = \frac{11}{7}$$



Ejemplo  $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \left(\frac{2-3}{6}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{-1}{6} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{-1}{24} - \frac{1}{5} = \frac{-29}{120}$$

Ejemplo  $\frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{3-5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)}$

$$\frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{3-5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{15+4-1}{12}}{3-5 \cdot \left(\frac{4+5}{10}\right)} = \frac{\frac{18}{12}}{3-5 \cdot \frac{9}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{3-\frac{5 \cdot 9}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{3-\frac{45}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{30-45}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-15}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-3}{2}} = -1$$

Ejemplo  $\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \left(3 - \frac{5}{4}\right) + 1$

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \left(3 - \frac{5}{4}\right) + 1 = \frac{-1+2}{3} \cdot \frac{12-5}{4} + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} + 1 = \frac{7}{12} + 1 = \frac{7+12}{12} = \frac{19}{12}$$

Ejemplo  $\left(1 - \frac{2}{5}\right) \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) \left(1 + \frac{3}{7}\right)\right]$

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) \left(1 + \frac{3}{7}\right)\right] = \frac{5-2}{5} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{15-8}{20} \cdot \frac{7+3}{7}\right] = \frac{3}{5} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{7 \cdot 10}{20 \cdot 7}\right] =$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4-3}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

Ejemplo  $\frac{\left(\frac{1}{3} - 3\right) \cdot 3 + \frac{2}{3} - 1}{-2 + \frac{5}{6} - 2^{-1}}$

$$\frac{\left(\frac{1}{3} - 3\right) \cdot 3 + \frac{2}{3} - 1}{-2 + \frac{5}{6} - 2^{-1}} = \frac{\frac{1-9}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} - 1}{-2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}} = \frac{-8 + \frac{2}{3} - 1}{-2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-24+2-3}{3}}{\frac{-12+5-3}{6}} = \frac{\frac{-25}{3}}{\frac{-10}{6}} = \frac{5^2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = 5$$

Ejemplo  $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{-1}{2}\right)^{-4} \left(\frac{1}{9}\right)^3}$



$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^4 (-2)^4 \left(\frac{1}{9}\right)^3} = \frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \frac{2^6}{3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^6}{3^5 \cdot 2^4} = \frac{2^6 \cdot 3^{10}}{3^5 \cdot 2^4} = 2^2 \cdot 3^5$$

Ejemplo

$$\frac{\left(\frac{3}{3}\right)^{-8} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)}$$

$$\frac{1^8 + \left(\frac{3-2}{12}\right)^{-1}}{\left(\frac{9-8}{12}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{1}{12}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{1+12}{\frac{1}{12^2}} = 13 \cdot 12^2 = 1872$$

Ejemplo

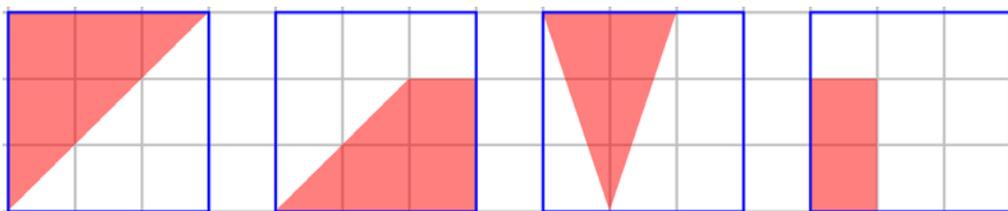
$$\frac{\left(\frac{3}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6}}$$

$$\frac{\frac{6+1}{6} - \left(\frac{3+4}{12}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{9-2}{12}\right)^{-1} - \left(\frac{4+3}{12}\right) - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6} - \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{-1} - \frac{7}{12} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6} - \frac{12}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{12}{7} - \frac{7}{12} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{6} - \frac{12}{14}}{\frac{12}{7} - \frac{7}{12} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{49-36}{42}}{\frac{144-49-14}{84}} =$$

$$\frac{13}{84} = \frac{13 \cdot 84}{42 \cdot 81} = \frac{26}{81}$$

### Ejemplos

Expresa en forma de *fracción irreducible* (la fracción más simplificada posible), la relación que hay entre la parte coloreada de rojo y el total del cuadrado azul.



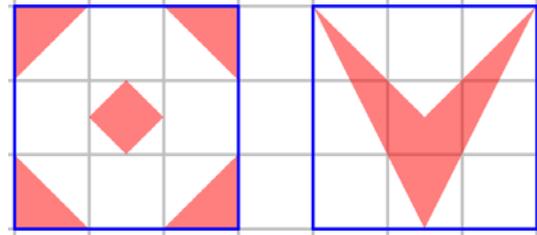
Soluciones De izquierda a derecha  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{9}$



### Ejemplos

Expresa en forma de fracción irreducible, la relación que hay entre la parte coloreada de rojo y el total.

Soluciones  $\frac{5}{18}$  y  $\frac{1}{4}$

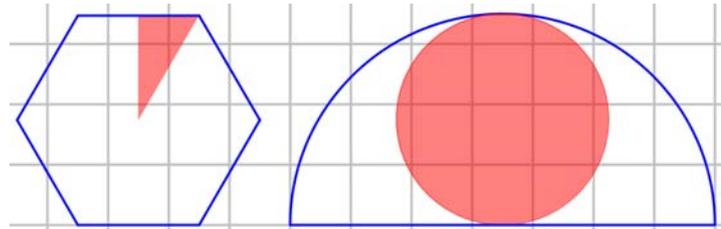


### Ejemplos

Expresa en forma de fracción irreducible, la relación que hay entre la parte coloreada de rojo y el total.

Soluciones

Para el hexágono la solución es  $\frac{1}{12}$



El diámetro del semicírculo azul es de 7 unidades (por lo tanto su radio es de 3'5 unidades) y el diámetro del círculo rojo coincide con el radio del semicírculo azul.

$$\text{Área del semicírculo azul} = \frac{\pi \cdot 3'5^2}{2}$$

$$\text{Área del círculo rojo} = \pi \cdot \left(\frac{3'5}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot 3'5^2}{2^2}$$

Por lo tanto la relación entre las áreas es  $\frac{\frac{\pi \cdot 3'5^2}{2^2}}{\frac{\pi \cdot 3'5^2}{2}} = \frac{\pi \cdot 3'5^2}{2^2} \cdot \frac{2}{\pi \cdot 3'5^2} = \frac{1}{2}$ , es decir, la mitad.

### Problemas propuestos con soluciones

a)  $\frac{\left[\frac{1}{6} - \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{7}{8}\right]}{-\frac{2}{5}}$

b)  $5 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{\frac{3}{5}}$

c)  $\frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{3 - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)}$

d)  $2 \cdot \frac{1}{3} + 4 - \frac{3}{\frac{3}{4}} + 8 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2 + \frac{\left(\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3}}}$

e)  $\frac{(3-4) \left[ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{1}{5}} \right]}{\left(3 : \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}}$

f)  $\frac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right) \left(3^{-1} + \frac{1}{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}}\right)^{-1}}$

Sol: a)  $\frac{-85}{24}$  b)  $\frac{128}{15}$  c)  $-1$  d)  $\frac{23}{35}$  e)  $\frac{29}{2160}$  f)  $\frac{5}{78}$