Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es no lineal cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado. La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución.

1) *Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.*
2) *Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.*
3) *Se resuelve la ecuación resultante.*
4) *Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación. Se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita*
5) *Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{aligned} \mathbf{x+y=5} \\ \mathbf{x\,y=4} \end{aligned}\right\}$

1) Despejamos "x" en la primera ecuación $x = 5 - y$
2) Sustituimos el valor de "x" en la segunda ecuación. $(5-y)\,y = 4$
3) Resolvemos la ecuación resultante

$$5y - y^2 = 4 \qquad -y^2 + 5y - 4 = 0 \qquad y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \qquad y_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \qquad y_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

4) Sustituimos estos valores en la primera ecuación.

$$y_1 = 4 \;\rightarrow\; x_1 = 5 - 4 = 1 \;\Rightarrow\; (1,4)$$
$$y_2 = 1 \;\rightarrow\; x_2 = 5 - 1 = 4 \;\Rightarrow\; (4,1)$$

5) *Comprobación*: $(1,4) \rightarrow \left.\begin{aligned} 1+4=5 \\ 1\cdot 4 = 4 \end{aligned}\right\}$ $\qquad (4,1) \rightarrow \left.\begin{aligned} 4+1=5 \\ 4\cdot 1 = 4 \end{aligned}\right\}$

Ejemplo $\left.\begin{aligned} \mathbf{x+y=5} \\ \mathbf{x^2+y^2=13} \end{aligned}\right\}$

$$y = 5 - x \qquad x^2 + (5-x)^2 = 13 \qquad x^2 + 5^2 + (-x)^2 + 2(5)(-x) = 13 \qquad 2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Simplificando $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \qquad x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_1=3 \;\rightarrow\; y_1=5-3=2 \;\Rightarrow\; (3,2)$$
$$x_2=2 \;\rightarrow\; y_2=5-2=3 \;\Rightarrow\; (2,3)$$

Comprobación: $(3,2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3+2=5 \\ 3^2+2^2=13 \end{array}\right\}$ $\quad (2,3) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2+3=5 \\ 2^2+3^2=13 \end{array}\right\}$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{(5+x)(3y-2)=154} \\ \mathbf{2x+3y=28} \end{array}\right\}$

Eliminamos los paréntesis $\left.\begin{array}{r} 15y-10+3xy-2x=154 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}$ $\quad \left.\begin{array}{r} 15y+3xy-2x=164 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}$

$$y=\frac{28-2x}{3} \qquad 15\cdot\frac{28-2x}{3}+3x\cdot\frac{28-2x}{3}-2x=164 \qquad 5(28-2x)+x(28-2x)-2x=164$$

$$140-10x+28x-2x^2-2x=164 \qquad -2x^2+16x-24=0 \qquad x^2-8x+12=0$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(12)}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+4}{2}=6 \\ x_2=\dfrac{8-4}{2}=2 \end{array}$$

$$x_1=6 \;\rightarrow\; y_1=\frac{28-2\cdot 6}{3}=\frac{16}{3} \;\Rightarrow\; \left(6,\frac{16}{3}\right)$$
$$x_2=2 \;\rightarrow\; y_2=\frac{28-2\cdot 2}{3}=\frac{24}{3}=8 \;\Rightarrow\; (2,8)$$

Comprobación:

$$\left(6,\frac{16}{3}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} (5+6)\left(3\cdot\dfrac{16}{3}-2\right)=154 \\ 2\cdot 6+3\cdot\dfrac{16}{3}=28 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 11\cdot 14=154 \\ 12+16=28 \end{array}\right\}$$

$$(2,8) \rightarrow \left.\begin{array}{r} (5+2)(3\cdot 8-2)=154 \\ 2\cdot 2+3\cdot 8=28 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 7\cdot 22=154 \\ 4+24=28 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y=2} \\ \mathbf{x^2+y^2-5xy=25} \end{array}\right\}$

$$y=2-x \qquad x^2+(2-x)^2-5x(2-x)=25 \qquad x^2+2^2+(-x)^2+2\cdot 2(-x)-10x+5x^2=25$$

$$7x^2-14x-21=0 \qquad x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\qquad x_1=\frac{2+4}{2}=3 \quad x_2=\frac{2-4}{2}=-1$$

$$x_1=3 \;\rightarrow\; y_1=2-3=-1 \;\Rightarrow\; (3,-1)$$
$$x_2=-1 \;\rightarrow\; y_2=2-(-1)=3 \;\Rightarrow\; (-1,3)$$

Comprobación:

$$(3,-1)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r}3-1=2\\ 3^2+(-1)^2-5\cdot 3\cdot(-1)=25\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}2=2\\ 25=25\end{array}\right\}$$

$$(-1,3)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r}-1+3=2\\ (-1)^2+3^2-5(-1)\cdot 3=25\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}2=2\\ 25=25\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{xy=24}\\ \mathbf{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1}\end{array}\right\}$

$$y=\frac{24}{x}\qquad \frac{3}{x}+\frac{2}{\frac{24}{x}}=1\qquad \frac{3}{x}+\frac{2x}{24}=1\qquad \frac{72+2x^2}{24x}=1\qquad 72+2x^2=24x$$

$$2x^2-24x+72=0\qquad x^2-12x+36=0$$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(36)}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\frac{12}{2}\qquad \begin{array}{l}x=6\\ y=4\end{array}\;\Rightarrow\;(6,4)$$

Comprobación: $(6,4)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r}6\cdot 4=24\\ \frac{3}{6}+\frac{2}{4}=1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}24=24\\ \frac{6+6}{12}=1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}24=24\\ 1=1\end{array}\right\}$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{(2x-1)^2-3x(2y+3)=-21}\\ \mathbf{x+y=3}\end{array}\right\}$

Eliminamos los paréntesis

$$\left.\begin{array}{r}(2x)^2+(-1)^2+2(2x)(-1)-6xy-9x=-21\\ x+y=3\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}4x^2+1-4x-6xy-9x=-21\\ x+y=3\end{array}\right\}$$

$$y=3-x\qquad 4x^2+1-4x-6x(3-x)-9x=-21\qquad 4x^2+1-4x-18x+6x^2-9x=-21$$

$$10x^2-31x+22=0$$

$$x=\frac{-(-31)\pm\sqrt{(-31)^2-4(10)(22)}}{2\cdot 10}=\frac{31\pm\sqrt{961-880}}{20}=\frac{31\pm 9}{20}\qquad\begin{cases}x_1=\dfrac{31+9}{20}=2\\ x_2=\dfrac{31-9}{20}=\dfrac{22}{20}=\dfrac{11}{10}\end{cases}$$

$$x_1=2\quad\rightarrow\quad y_1=3-2=1\qquad\Rightarrow\quad(2,1)$$

$$x_2=\frac{11}{10}\quad\rightarrow\quad y_2=3-\frac{11}{10}=\frac{19}{10}\qquad\Rightarrow\quad\left(\frac{11}{10},\frac{19}{10}\right)$$

Comprobación:

$$(2,1)\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}(2\cdot 2-1)^2-3\cdot 2(2\cdot 1+3)=-21\\ 2+1=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}9-30=-21\\ 3=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-21=-21\\ 3=3\end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{11}{10},\frac{19}{10}\right)\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}\left(2\cdot\dfrac{11}{10}-1\right)^2-3\cdot\dfrac{11}{10}\left(2\cdot\dfrac{19}{10}+3\right)=-21\\ \dfrac{11}{10}+\dfrac{19}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}\left(\dfrac{12}{10}\right)^2-\dfrac{33}{10}\left(\dfrac{38}{10}+3\right)=-21\\ \dfrac{11}{10}+\dfrac{19}{10}=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{144}{100}-\dfrac{33}{10}\cdot\dfrac{68}{10}=-21\\ \dfrac{11+19}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-\dfrac{2100}{100}=-21\\ \dfrac{30}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-21=-21\\ 3=3\end{array}\right\}$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ y=x^2-4x-2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} y=3x+2 \\ y=x^2-2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} y=x^2-4x \\ x-2y=10 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} y=x^2+6x+10 \\ 4x-y=-9 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x^2-y=-2 \\ -x+y=3 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} y=-1 \\ y+x^2=2x+5 \end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{r} y+2=x^2 \\ 4y-x^2=4 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{r} y-1=x^2 \\ 4(y-1)=x^2 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 4x+y=x^2+1 \\ y+2x=-x^2+5 \end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{r} y+4x=x^2+4 \\ y=-x^2-4x+2 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{r} y+4x=x^2+4 \\ y+6x=-x^2+9 \end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{r} y=x^2-6x+8 \\ y=x^2+6x+8 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x^2+y=7 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x^2-y^2=2 \end{array}\right\}$ o) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=15 \\ xy=9 \end{array}\right\}$ p) $\left.\begin{array}{r} 2x^2+y^2=9 \\ xy=-2 \end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{r} (x+2y)^2-5x+3y=26 \\ x+3y=7 \end{array}\right\}$ r) $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=8 \\ xy=-3 \end{array}\right\}$ s) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x+y}{2}-\dfrac{3y+x}{x}=2 \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y+1}{2}=-4 \end{array}\right\}$

Soluciones

a) $\begin{cases}(-2,10)\\(5,3)\end{cases}$ b) $\begin{cases}(-1,-1)\\(4,14)\end{cases}$ c) $\begin{cases}(2,-4)\\\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{15}{4}\right)\end{cases}$ d) $(-1,5)$ e) $\begin{cases}(0'76,3'76)\\(-0'43,2'56)\end{cases}$ f) $\begin{cases}(3'46,-1)\\(-1'64,-1)\end{cases}$

g) $\begin{cases}(2,2)\\(-2,2)\end{cases}$ h) $\{(0,1)$ i) $\begin{cases}(-1,6)\\(2,-3)\end{cases}$ j) no tiene k) $\begin{cases}(1'15,0'70)\\(-2'15,17'29)\end{cases}$ l) $\{(0,8)$

m) $(3,-2)$ y $(-1,6)$ n) $(1,0)$ y $(-3,4)$ o) $(3,3)$ y $(2,4'5)$

p) $(-2,1),(2,-1),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2}\right)$ q) $(1,2)$ y $(25,-6)$ r) $(3,-1)$ y $(-3,1)$

s) $(5,9)$ y $\left(-\dfrac{70}{17},\dfrac{91}{17}\right)$

Resolución de problemas

1) ***¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y&=16 \\ x&=3y \end{aligned}\right\} \qquad 2(3y)+2y=16 \qquad 8y=16 \qquad y=2 \quad \Rightarrow \quad x=3\cdot 2=6$$

Comprobación: $(6,2) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2\cdot 6+2\cdot 2&=16 \\ 6&=3\cdot 2 \end{aligned}\right\}$

El área del rectángulo es: $6\,\text{cm}\cdot 2\,\text{cm}=12\,\text{cm}^2$

2) ***La diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su área 48 cm^2. Calcular sus dimensiones.***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=100 \\ xy&=48 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad y=\frac{48}{x} \quad \rightarrow \quad x^2+\left(\frac{48}{x}\right)^2=100 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{2304}{x^2}=100$$

$$x^4-100x^2+2304=0 \quad \rightarrow \quad x^2=z \quad \rightarrow \quad z^2-100z+2304=0$$

$$z=\frac{-(-100)\pm\sqrt{(-100)^2-4(1)(2304)}}{2\cdot 1}=\frac{100\pm 28}{2} \qquad \begin{aligned} z_1&=\frac{100+28}{2}=64 \\ z_2&=\frac{100-28}{2}=36 \end{aligned}$$

$$z_1=64 \quad \rightarrow \quad x_1=\sqrt{64}=8 \quad \rightarrow \quad y_1=\frac{48}{8}=6 \quad \Rightarrow \quad (8,6)$$

$$z_2=36 \quad \rightarrow \quad x_2=\sqrt{36}=6 \quad \rightarrow \quad y_2=\frac{48}{6}=8 \quad \Rightarrow \quad (6,8)$$

Comprobación: $(6,8) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 6^2+8^2&=100 \\ 6\cdot 8&=48 \end{aligned}\right\} \qquad (8,6) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 8+6&=14 \\ 8\cdot 6&=48 \end{aligned}\right\}$

Las dimensiones del rectángulo pueden ser 8 cm de base y 6 cm de altura ó 6 cm de base y 8 cm de altura.

3) ***Las diagonales de un rombo se diferencian en 6 cm y su área es 56 cm^2. Calcula la medida de las diagonales.***

Sean "x" e "y" las diagonales del rombo. Sabemos que la fórmula que da el área del rombo es $A=\dfrac{D\cdot d}{2}$, donde D es la diagonal mayor y d la diagonal menor.

$$\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ \dfrac{x\cdot y}{2}=56 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ x\,y=112 \end{array}\right\} \qquad x=y+6 \qquad (y+6)\,y=112 \qquad y^2+6y-112=0$$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{(6^2)-4\,(1)\,(-112)}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+448}}{2} \qquad y_1=\frac{-6+22}{2}=8 \qquad y_2=\frac{-6-22}{2}=-14$$

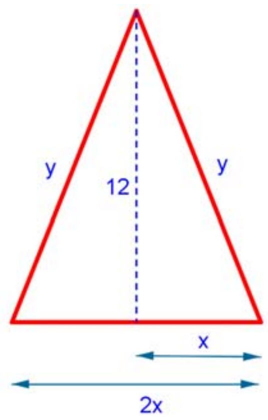
Evidentemente, la solución negativa no es válida. Las dimensiones de las diagonales son

$$y_1=8 \quad\rightarrow\quad x_1=8+6=14 \quad\Rightarrow\quad (14,8)$$

Las dimensiones de las diagonales son 8 cm y 14 cm.

4) ***El perímetro de un triángulo isósceles es 36 m. Las altura relativa al lado desigual mide 12 cm. Calcula la medida de los lados iguales.***

Sea “y” el valor de los lados iguales y “x” la mitad del lado que forma la base.



$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=36 \\ y^2=12^2+x^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=18 \\ y^2=12^2+x^2 \end{array}\right\}$$

$$x=18-y \qquad y^2=144+(18-y)^2$$

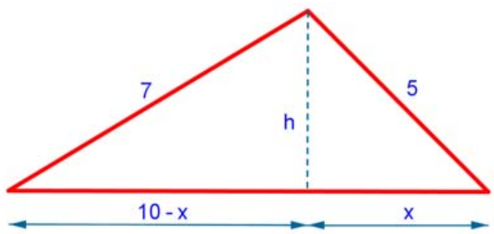
$$y^2=144+324-36y+y^2 \qquad 36y=468$$

$$y=\frac{468}{36}=13 \quad\Rightarrow\quad x=18-13=5$$

Los lados desiguales miden 13 cm.

5) ***Los lados de un triángulo miden 5 cm, 7 cm y 10 cm, respectivamente. Calcula la altura relativa al lado más largo y halla el área del triángulo.***

Aplicamos el Teorema de Pitágoras a cada uno de los dos triángulos rectángulos.



$$\left.\begin{array}{l} 5^2=h^2+x^2 \\ 7^2=h^2+(10-x)^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} h^2=25-x^2 \\ h^2=49-(10-x)^2 \end{array}\right\}$$

Igualando los segundos miembros tenemos:

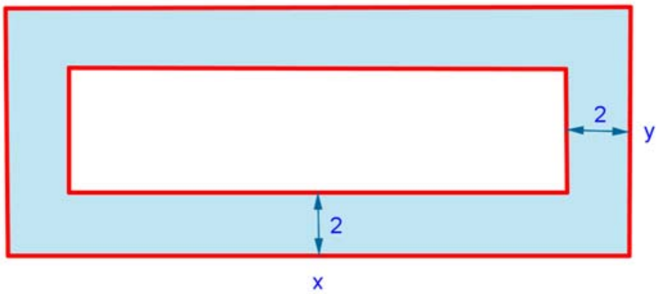
$$25-x^2=49-(10-x)^2 \qquad 25-x^2=49-\left[10^2+2\,(10)\,(-x)+(-x)^2\right]$$

$$25-x^2=49-\left[100-20x+x^2\right] \qquad 25-x^2=49-100+20x-x^2$$

$$20x = 76 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{76}{20} = 3'8\,\text{cm} \qquad h^2 = 25 - 3'8^2 = 10'56$$

$$h = \sqrt{10'56} = 3'25\ \text{cm} \qquad A = \frac{10 \cdot 3'25}{2} = 16'25\,\text{cm}^2$$

6) ***En una parcela rectangular de 60 m de perímetro se hace un jardín rectangular bordeado por un camino de 2 m de ancho. Calcula las dimensiones de la parcela sabiendo que el área del jardín es de 112 m^2.***



$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 60 \\ (x-4)(y-4) = 112 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ (x-4)(y-4) = 112 \end{array}\right\}$$

Eliminamos los paréntesis:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ xy - 4x - 4y + 16 = 112 \end{array}\right\} \qquad y = 30 - x \qquad x(30-x) - 4x - 4(30-x) + 16 = 112$$

$$30x - x^2 - 4x - 120 + 4x + 16 = 112 \qquad -x^2 + 30x - 216 = 0 \qquad x^2 - 30x + 216 = 0$$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(216)}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{30+6}{2} = 18 \\ x_2 = \dfrac{30-6}{2} = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 18 & \to & y_1 = 30 - 18 = 12 \\ x_2 = 12 & \to & y_2 = 30 - 12 = 18 \end{array}$$

Las dimensiones de la parcela son de 18 m y 12 m.

7) ***Varios amigos van a repartir un premio de 800 € a partes iguales. Dos de ellos deciden renunciar a su parte y de esta forma los demás reciben 20 € más cada uno. ¿Cuántos amigos son? ¿Cuánto recibe cada uno?***

Sean “x” los amigos e “y” el dinero que reciben cada uno.

$$\left.\begin{array}{r} xy = 800 \\ (x-2)(y+20) = 800 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} xy = 800 \\ xy + 20x - 2y - 40 = 800 \end{array}\right\} \qquad y = \frac{800}{x}$$

$$x\cdot\frac{800}{x}+20x-2\cdot\frac{800}{x}-40=800 \qquad 800+20x-\frac{1600}{x}=840$$

$$800x+20x^2-1600=840x \qquad 20x^2-40x-1600=0 \qquad x^2-2x-80=0$$

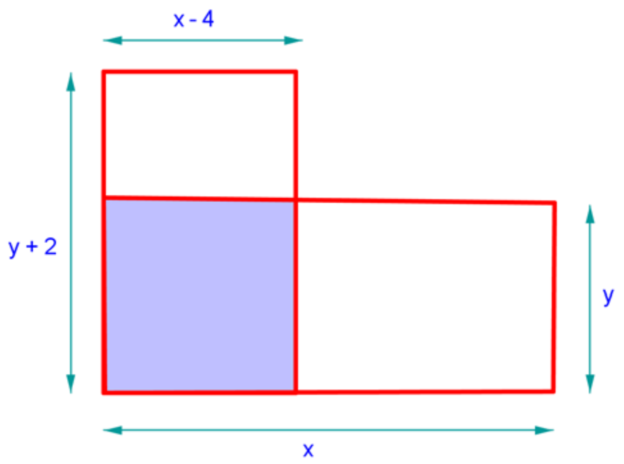
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-80)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+320}}{2} \qquad x_1=\frac{2+18}{2}=10 \qquad x_2=\frac{2-18}{2}=-8$$

La solución válida es $x=10 \Rightarrow y=\frac{800}{10}=80$

Hay 10 amigos. Como 2 de ellos renuncian a su parte, el resto, es decir 8, reciben $80+20=100$ € cada uno.

8) ***Si la base de un rectángulo disminuye 2 cm y la altura aumenta 4 cm, se convierte en un cuadrado. Si la base disminuye 4 cm y la altura aumenta 2 cm, su área disminuye 12 cm²***. ***Calcula los lados del rectángulo.***

$$\left.\begin{array}{r} x-2=y+4 \\ (x-4)(y+2)=xy-12 \end{array}\right\}$$



Eliminamos los paréntesis.

$$\left.\begin{array}{r} x-2=y+4 \\ xy+2x-4y-8=xy-12 \end{array}\right\}$$

$$x=y+6$$

$$(y+6)\,y+2\,(y+6)-4y-8=(y+6)\,y-12$$

$$y^2+6y+2y+12-4y-8=y^2+6y-12 \qquad -2y=-16 \rightarrow y=\frac{-16}{-2}=8 \Rightarrow x=8+6=14$$

Los lados del rectángulo miden 8 cm y 14 cm.

9) ***La suma de dos números enteros positivos es 36. El producto del primero aumentado en 3 unidades por el segundo aumentado en 2 unidades es 408. Encuentra los dos números.***

Sean “x” e “y” los números que buscamos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=36 \\ (x+3)(y+2)=408 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=36 \\ xy+2x+3y+6=408 \end{array}\right\} \qquad y=36-x$$

$$x\cdot(36-x)+2x+3\cdot(36-x)+6=408 \qquad 36x-x^2+2x+108-3x+6=408$$

$$-x^2+35x-294=0 \qquad x^2-35x+294=0$$

$$x=\frac{-(-35)\pm\sqrt{(-35)^2-4(1)(294)}}{2\cdot 1}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1176}}{2}\qquad \begin{matrix} x_1=\frac{35+7}{2}=21 \\ x_2=\frac{35-7}{2}=14 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_1=21 & \rightarrow & y_1=36-21=15 \\ x_2=14 & \rightarrow & y_2=36-14=22 \end{matrix}$$

Comprobación:

$$(21,15)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{matrix} 21+15=36 \\ (21+3)(15+2)=408 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 36=36 \\ 24\cdot 17=408 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 36=36 \\ 408=408 \end{matrix}\right\}$$

$$(14,22)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{matrix} 14+22=36 \\ (14+3)(22+2)=408 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 36=36 \\ 17\cdot 24=408 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 36=36 \\ 408=408 \end{matrix}\right\}$$

Hay dos parejas de números que cumplen las condiciones del problema, $(21,15)$ y $(14,22)$.

10) ***La diferencia de los cuadrados de dos números positivos es 56 y el mayor tiene dos unidades más que el pequeño. Encuentra los dos números***

Sea “x” mayor de los dos números e “y” el menor.

$$\left.\begin{matrix} x^2-y^2=56 \\ x=y+2 \end{matrix}\right\} \qquad (y+2)^2-y^2=56 \qquad y^2+2^2+2(y)(2)-y^2x=56$$

$$y^2+4+4y-y^2=56 \qquad 4y=52 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{52}{4}=13 \quad\Rightarrow\quad x=13+2=15$$

Comprobación:

$$(15,13)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{matrix} 15^2-13^2=56 \\ 15=13+2 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 225-169=56 \\ 15=15 \end{matrix}\right\}$$

Los dos números son el 15 y el 13

11) ***Los lados de dos cuadrados suman 30 cm. Con sus diagonales se forma un rectángulo de 288 cm². Encuentra el valor de los lados de estos cuadrados.***

Sean “x” e “y” los lados de los cuadrados.

La diagonal del primer cuadrado de lado x se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$d_1=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=x\sqrt{2}$$

La diagonal del segundo cuadrado de lado y se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$d_2=\sqrt{y^2+y^2}=\sqrt{2y^2}=y\sqrt{2}$$

Con estas diagonales formamos un cuadrado de área 288 cm^2.

Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 2x\cdot y=288 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x\,y=144 \end{array}\right\} \quad y=30-x$$

$$x\,(30-x)=144 \qquad 30x-x^2-144=0 \qquad x^2-30x+144=0$$

$$x=\frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2-4\,(1)\,(144)}}{2\cdot 1}=\frac{30\pm\sqrt{900-576}}{2} \qquad x_1=\frac{30+18}{2}=24 \qquad x_2=\frac{30-18}{2}=6$$

$$x_1=24 \quad \to \quad y_1=30-24=6$$
$$x_2=6 \quad \to \quad y_2=30-6=24$$

Comprobación:

$$(24,6) \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} 24+6=30 \\ 24\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 288=288 \end{array}\right\}$$

$$(6,24) \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} 6+24=30 \\ 6\sqrt{2}\cdot 24\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 288=288 \end{array}\right\}$$

Los lados de los cuadrados son 24 cm y 6 cm