Ecuaciones de 2º grado

La fórmula para calcular las raíces de la ecuación completa de segundo grado $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ es:

$$\mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Número de soluciones

La cantidad b^2-4ac que aparece bajo el radical se llama ***discriminante*** de la ecuación, ya que permite *discriminar o distinguir* el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, y de su signo depende que ésta tenga o no soluciones.

- Si $\mathbf{b^2-4ac>0}$ existen ***dos soluciones distintas***. Si las soluciones son x_1 y x_2, la ecuación puede factorizarse así:
$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$
- Si $\mathbf{b^2-4ac=0}$ el radical se anula, y las dos soluciones son iguales. Se dice también que se trata de ***una solución o raíz doble.***

  Si la raíz doble es x_1, la ecuación puede factorizarse así:
$$a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2=0$$
- Si $\mathbf{b^2-4ac<0}$ no existen raíces cuadradas reales y la ecuación ***no tiene soluciones reales***. En este caso se dice que la ecuación es irreducible ya que no se puede factorizar al carecer de raíces reales.

Ejemplo $\mathbf{x^2-7x-18=0}$

Es muy importante identificar bien los coeficientes de x^2, de x y el término independiente, con sus signos respectivos. $a=1, b=-7$ y $c=-18$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{2}=\frac{7\pm 11}{2}\qquad x_1=\frac{7+11}{2}=9\qquad x_2=\frac{7-11}{2}=-2$$

Comprobación:
$$x_1=9\ \rightarrow\ 9^2-7\cdot 9-18=0\qquad 81-63-18=0$$
$$x_2=-2\ \rightarrow\ (-2)^2-7(-2)-18=0\qquad 4+14-18=0$$

Ejemplo $\mathbf{5x^2-6x-27=0}$

$a=5, b=-6$ y $c=-27$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(5)(-27)}}{2\cdot 5}=\frac{6\pm\sqrt{36+540}}{10}=\frac{6\pm 24}{10}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{6+24}{10}=3 \\ x_2=\dfrac{6-24}{10}=-1'8\end{array}$$

Comprobación: $\begin{array}{llll} x_1=3 & \rightarrow & 5\cdot 3^2-6\cdot 3-27=0 & 45-18-27=0 \\ x_2=-1'8 & \rightarrow & 5\cdot(-1'8)^2-6\cdot(-1'8)-27=0 & 16'2+10'8-27=0 \end{array}$

Ejemplo $\mathbf{12x^2+4x-5=0}$

$a=12, b=4$ y $c=-5$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(12)(-5)}}{2\cdot 12}=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{24}=\frac{-4\pm 16}{24}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-4+16}{24}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-4-16}{24}=\dfrac{-5}{6}\end{array}$$

Comprobación:

$$x_1=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}-5=0\qquad 12\cdot\frac{1}{4}+2-5=0\qquad 3+2-5=0$$

$$x_2=\frac{-5}{6}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{-5}{6}\right)^2+4\cdot\frac{-5}{6}-5=0\qquad 12\cdot\frac{25}{36}-\frac{10}{3}-5=0\qquad \frac{25}{3}-\frac{10}{3}-5=0$$

Ejemplo $\mathbf{x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0}$

$a=1, b=-\frac{7}{6}$ y $c=\frac{1}{3}$ En este caso lo más práctico es eliminar los denominadores para operar con número enteros. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0 \rightarrow 6x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(6)(2)}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{7+1}{12}=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{7-1}{12}=\dfrac{1}{2}\end{array}$$

Comprobación: $\begin{array}{lllll} x_1=\dfrac{2}{3} & \rightarrow & \left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}=0 & \dfrac{4}{9}-\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{3}=0 & \dfrac{4-7+3}{9}=0 \\ x_2=\dfrac{1}{2} & \rightarrow & \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}=0 & \dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{3}=0 & \dfrac{3-7+4}{9}=0 \end{array}$

Ejemplo $\mathbf{x^2+(x+2)^2=580}$

Eliminamos el paréntesis, reducimos términos semejantes y simplificamos la expresión resultante.

$$x^2+x^2+4x+4=580\quad\rightarrow\quad 2x^2+4x-576=0\quad\rightarrow\quad x^2+2x-288=0$$

$a=1, b=2 \text{ y } c=-288$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-288)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{1156}}{2}=\frac{-2\pm 34}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\frac{-2+34}{2}=16 \\ x_2=\frac{-2-34}{2}=-18 \end{array}$$

Comprobación: $\begin{array}{llll} x_1=16 & \rightarrow & 16^2+2\cdot 16-288=0 & 256+32-288=0 \\ x_2=-18 & \rightarrow & (-18)^2+2(-18)-288=0 & 324-36-288=0 \end{array}$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{4x^2-4x+1=0}$

$a=4, b=-4 \text{ y } c=1$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(4)(1)}}{2\cdot 4}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm 0}{8}=\frac{1}{2}\qquad x_1=x_2=\frac{1}{2}$$

En este caso la solución o raíz es doble.

Comprobación: $x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+1=0 \qquad 4\cdot\frac{1}{4}-2+1=0 \qquad 1-2+1=0$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{x^2+x+1=0}$

$a=1, b=1 \text{ y } c=1$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\quad\Rightarrow\quad \text{No tiene solución}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{x^2-5x=0}$

<u>*Aplicando la fórmula*</u> $a=1, b=-5 \text{ y } c=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(0)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{5\pm 5}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\frac{5+5}{2}=5 \\ x_2=\frac{5-5}{2}=\frac{0}{2}=0 \end{array}$$

<u>*Sacando factor común*</u>

$x^2-5x=0 \qquad x(x-5)=0 \qquad \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=5 \end{array}$

Comprobación: $\begin{array}{llll} x_1=0 & \rightarrow & 0^2-5\cdot 0=0 & 0=0 \\ x_2=5 & \rightarrow & 5^2-5\cdot 5=0 & 25-25=0 \end{array}$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{x^2-81=0}$

<u>*Aplicando la fórmula*</u> $a=1, b=0 \text{ y } c=-81$

$$x=\frac{0^2\pm\sqrt{0^2-4(1)(-81)}}{2\cdot 1}=\frac{\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{\pm 18}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=9 \\ x_2=-9 \end{array}$$

Despejando directamente la incógnita

$x^2-81=0 \qquad x^2=81 \qquad x=\pm\sqrt{81}=\pm 9 \qquad \begin{matrix} x_1=9 \\ x_2=-9 \end{matrix}$

Comprobación: $\begin{matrix} x_1=9 & \rightarrow & 9^2-81=0 & 81-81=0 \\ x_2=-9 & \rightarrow & (-9)^2-81=0 & 81-81=0 \end{matrix}$

Ejemplo *Resolver las siguientes ecuaciones sin aplicar la fórmula.*

$\mathbf{a)\ 3x^2-5x=0} \qquad \mathbf{b)\ 25x^2-\frac{1}{100}=0} \qquad \mathbf{c)\ 4(3-2x)(1+7x)=0}$

Soluciones

a) $x(3x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \end{cases}$

b) $25x^2-\frac{1}{100}=0 \qquad 25x^2=\frac{1}{100} \qquad x^2=\frac{1}{2500} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2500}}=\pm\frac{1}{50}$

c) $4(3-2x)(1+7x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \quad x=\frac{-3}{-2}=1'5 \\ 1+7x=0 \Rightarrow 7x=-1 \quad x=\frac{-1}{7} \end{cases}$

Ejemplo $\mathbf{x(2x-1)+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$2x^2-x+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5} \qquad 10x^2-5x+3=3x^2-x+1 \qquad 7x^2-4x+2=0$

$a=7, b=-4 \text{ y } c=2$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(7)(2)}}{2\cdot 7}=\frac{4\pm\sqrt{16-56}}{14}=\frac{4\pm\sqrt{-40}}{14}$$ No tiene solución

Ejemplo $\mathbf{x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$x^2-x+1=\frac{5}{6}+\frac{2x^2-x}{3} \qquad 6x^2-6x+6=5+4x^2-2x \qquad 2x^2-4x+1=0$

$a=2, b=-4 \text{ y } c=1$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(1)}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\qquad x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\quad x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo $\mathbf{(x+1)\left[\frac{3}{2}-2(1-x)\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}}$

Eliminamos el paréntesis del interior del corchete.

$$(x+1)\left[\frac{3}{2}-2+2x)\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}\qquad (x+1)\left[\frac{-1+4x}{2}\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}$$

Multiplicamos el paréntesis por el corchete.

$$\frac{(x+1)(-1+4x)}{2}=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}\qquad \frac{-x+4x^2-1+4x}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2}$$

$$\frac{4x^2+3x-1}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2}\qquad 4x^2+3x-1=6x^2+11x-11\qquad -2x^2-8x+10=0$$

$$2x^2+8x-10=0\qquad a=2,b=8\text{ y }c=-10$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(2)(-10)}}{2\cdot 2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{4}=\frac{-8\pm 12}{4}\qquad x_1=\frac{-8+12}{4}=1\quad x_2=\frac{-8-12}{4}=-5$$

Ejemplo $\mathbf{\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}}$

Eliminamos los paréntesis. $\frac{x^2+4+4x}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{x^2+9+6x}{2}+\frac{1}{5}$

$\text{m.c.m.}(2,4,5)=20$ $\qquad 20\left(\frac{x^2+4+4x}{5}-\frac{x^2-9}{4}\right)=20\left(\frac{x^2+9+6x}{2}+\frac{1}{5}\right)$

$$4(x^2+4+4x)-5(x^2-9)=10(x^2+9+6x)+4$$

$$4x^2+16+16x-5x^2+45=10x^2+90+60x+4\qquad 11x^2+44x+33=0\qquad x^2+4x+3=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(3)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\qquad x_1=\frac{-4+2}{2}=-1\quad x_2=\frac{-4-2}{2}=-3$$

Ejemplo $\mathbf{(v-1)^2=\frac{v(v+1)}{2}+1}$

Eliminamos los paréntesis. $\quad v^2+1-2v=\frac{v^2+v}{2}+1$

$$2v^2+2-4v=v^2+v+2 \qquad v^2-5v=0 \quad v(v-5)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} v_1=0 \\ v-5=0 \rightarrow v_2=5 \end{array}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{\dfrac{(m-2)^2}{3}-\dfrac{(m+1)(m-5)}{2}=1+\dfrac{m-1}{2}}$

Eliminamos los paréntesis. $\dfrac{m^2+4-4m}{3}-\dfrac{m^2-5m+m-5}{2}=1+\dfrac{m-1}{2}$

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad 6\left(\frac{m^2+4-4m}{3}-\frac{m^2-4m-5}{2}\right)=6\left(1+\frac{m-1}{2}\right)$$

$$2(m^2+4-4m)-3(m^2-4m-5)=6+3(m-1)$$

$$2m^2+8-8m-3m^2+12m+15=6+3m-3 \qquad m^2-m-20=0$$

$$m=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-20)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1=\dfrac{1+9}{2}=5 \\ m_2=\dfrac{1-9}{2}=-4 \end{array}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{(t-1)(t+1)-\dfrac{6-5t}{3}=(t+2)^2}$

Eliminamos los paréntesis. $t^2-1-\dfrac{6-5t}{3}=t^2+4+4t$

$$3t^2-3-(6-5t)=3t^2+12+12t \qquad 3t^2-3-6+5t=3t^2+12+12t$$

$$-7t=21 \qquad t=\frac{21}{-7}-3$$

Ecuaciones con radicales o ecuaciones irracionales

Son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical. Se resuelven mediante los pasos siguientes:

1) *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando los restantes términos, radicales y no radicales, al otro miembro.*
2) *Se elevan al cuadrado los dos miembros. Si el índice de la raíz es distinto de 2, hay que elevar los dos miembros de la ecuación a la potencia necesaria según el índice de la raíz, con el objeto de que ésta desaparezca.*
3) *Si existe todavía algún radical se repite el proceso.*
4) *Se resuelve la ecuación obtenida y se comprueba cuáles de las soluciones obtenidas verifican la ecuación dada. Es fundamental comprobar todas las soluciones, ya que en el proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones, pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar.*

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{2x-3}-x=-1}$

1) $\sqrt{2x-3}=-1+x$

2) $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-1+x)^2 \qquad 2x-3=(-1)^2+(x)^2+2(-1)(+x) \qquad 2x-3=1+x^2-2x$

3) $x^2-4x+4=0 \qquad x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

4) $\sqrt{2\cdot 2-3}-2=-1 \qquad \sqrt{1}-2=-1 \qquad -1=-1$

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{x}+3=4}$

$$\sqrt{x}=4-3 \qquad \sqrt{x}=1 \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2=1^2 \qquad x=1$$

Comprobación: $\sqrt{1}+3=4 \qquad 4=4$

Ejemplo $\mathbf{2\sqrt{x+5}+10=x}$

$$2\sqrt{x+5}=x-10 \qquad \left(2\sqrt{x+5}\right)^2=(x-10)^2 \qquad 4(x+5)=x^2+(-10)^2+2(x)(-10)$$

$$4x+20=x^2+100-20x \qquad x^2-24x+80=0$$

$$x=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4(1)(80)}}{2\cdot 1}=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{2}=\frac{24\pm 16}{2} \qquad x_1=\frac{24+16}{2}=20 \quad x_2=\frac{24-16}{2}=4$$

Comprobación: $x_1=20 \rightarrow 2\sqrt{20+5}+10=20 \qquad 10+10=20 \qquad 20=20$

$x_2=4 \rightarrow 2\sqrt{4+5}+10=4 \qquad 6+10\neq 4 \qquad 16\neq 4$

La solución de la ecuación es $x=20$.

Ejemplo $\mathbf{\dfrac{10}{\sqrt{6-x}}=5}$

Eliminamos el denominador pasando la raíz al segundo miembro multiplicando al 5.

$$10=5\sqrt{6-x} \qquad 10^2=\left(5\sqrt{6-x}\right)^2 \qquad 100=25(6-x) \qquad 100=150-25x$$

$$25x=50 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{50}{25}=2$$

Comprobación: $\dfrac{10}{\sqrt{6-2}}=5 \qquad \dfrac{10}{2}=5 \quad 5=5$

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{4-2x}+\sqrt{x+2}=2}$

Dejamos uno de los radicales en el primer miembro y elevamos los dos miembros al cuadrado.

$$\sqrt{4-2x}=2-\sqrt{x+2} \qquad \left(\sqrt{4-2x}\right)^2=\left(2-\sqrt{x+2}\right)^2$$

$$4-2x=2^2+\left(-\sqrt{x+2}\right)^2+2(2)\left(-\sqrt{x+2}\right) \qquad 4-2x=4+x+2-4\sqrt{x+2}$$

Dejamos el radical en el primer miembro y elevamos nuevamente los dos miembros al cuadrado.

$$4\sqrt{x+2}=4+x+2-4+2x \qquad 4\sqrt{x+2}=2+3x \qquad \left(4\sqrt{x+2}\right)^2=(2+3x)^2$$

$$16(x+2)=2^2+(3x)^2+2(2)(3x) \qquad 16x+32=4+9x^2+12x \qquad 9x^2-4x-28=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(9)(-28)}}{2\cdot 9}=\frac{4\pm\sqrt{16+1008}}{18}=\frac{4\pm 32}{18} \qquad x_1=\frac{4+32}{18}=2 \qquad x_2=\frac{4-32}{18}=-\frac{14}{9}$$

Comprobación:

$$x_1=2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{4-2\cdot 2}=2-\sqrt{2+2} \qquad 0=2-2 \qquad 0=0$$

$$x_2=-\frac{14}{9} \quad \rightarrow \quad \sqrt{4-2\cdot\left(\frac{-14}{9}\right)}\neq 2-\sqrt{\frac{-14}{9}+2} \qquad \sqrt{4+\frac{28}{9}}\neq 2-\sqrt{\frac{4}{9}} \qquad \frac{8}{3}\neq\frac{4}{3}$$

La solución de la ecuación es $x=2$.

Ejemplo $\mathbf{7+\sqrt[3]{5x-2}=9}$

$$\sqrt[3]{5x-2}=9-7 \qquad \sqrt[3]{5x-2}=2 \qquad \left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3=2^3 \qquad 5x-2=8 \qquad x=2$$

Comprobación: $7+\sqrt[3]{5\cdot 2-2}=9 \qquad 7+\sqrt[3]{8}=9 \qquad 7+2=9 \qquad 9=9$

Ecuaciones Bicuadradas

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones de cuarto grado que carecen de término impar. Su forma general es:

$$\mathbf{a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0}$$

Si la expresamos de la forma $a\,(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ *y hacemos el cambio* $x^2 = z$ *obtenemos la ecuación de segundo grado* $a\,z^2 + bz + c = 0$. *Resolviendo esta ecuación en z se obtienen a lo más dos soluciones* z_1 y z_2 *que permiten calcular x.*

$$x^2 = z_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = +\sqrt{z_1} \\ x = -\sqrt{z_1} \end{array} \qquad\qquad x^2 = z_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = +\sqrt{z_2} \\ x = -\sqrt{z_2} \end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$

$$x^2 = z \qquad z^2 - 5z + 4 = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ z_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{array}$$

$$z_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{4} = 2 \\ x_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{array} \qquad\qquad z_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = +\sqrt{1} = 1 \\ x_4 = -\sqrt{1} = -1 \end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4 - 5x^2 - 36 = 0}$

$$x^2 = z \qquad z^2 - 5z - 36 = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 13}{2} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9 \\ z_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4 \end{array}$$

$$z_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{9} = 3 \\ x_2 = -\sqrt{9} = -3 \end{array} \qquad\qquad z_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay solución}$$

Ejemplo $\mathbf{3x^4 - 5x^2 = 0}$

$$x^2 = z \qquad 3z^2 - 5z = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(0)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 5}{6} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+5}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \\ z_2 = \dfrac{5-5}{6} = 0 \end{array}$$

$$z_1 = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{array} \qquad\qquad z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_4 = 0$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $x^2 - 6x + 9 = 16$ **b)** $3x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + 7 - x$ **c)** $11(x-1)^2 = (2x-3)^2 + 4x^2 + 1$

d) $\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{x^2-9}{4} = \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5}$ **e)** $2 + (2x+3)(x-2) = (2x+1)(x-4) + 18$

f) $\frac{x^2-x-4}{4} = \frac{x^2+x-2}{2}$ **g)** $\frac{x^2+1}{3} - 1 = \frac{x^2-4}{6} + x$ **h)** $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

i) $3x + 6x = (x+2)(5-3x)$ **j)** $\left(x - \frac{1}{3}\right)(3x+4) = 0$ **k)** $\frac{16x^2}{25} - \frac{1}{16} = 0$ **l)** $\frac{3}{5}x^2 - x = 0$

m) $\frac{x^2-32}{4} = -\frac{28}{x^2-9}$ **n)** $(x\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+x)^2 = (\sqrt{3}\,x-2)^2$ **o)** $x^4 - 16 = 0$

p) $\sqrt{2x-1} = 4$ **q)** $x = \sqrt{x+7} + 5$ **r)** $x - 7 = 2\sqrt{x+1}$ **s)** $3 - \sqrt{y+2} = 7$

t) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$ **u)** $\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{x-3}$ **v)** $\frac{\sqrt{-3x+2}}{\sqrt{-x+2}} = 3$

Soluciones

a) $x_1 = 7$ y $x_2 = -1$ b) $x_1 = 2$ y $x_2 = -5$ c) $x_1 = \frac{5+\sqrt{22}}{3}$ y $x_2 = \frac{5-\sqrt{22}}{3}$

d) $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$ e) $x = 3$ f) $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$ g) $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$

h) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$ i) $x_1 = \frac{\sqrt{55}-5}{3}$ y $x_2 = \frac{-\sqrt{55}-5}{3}$ j) $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{4}{3}$

k) $x_1 = -\frac{5}{16}$ y $x_2 = \frac{5}{16}$ l) $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{3}$ m) $x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 4$ y $x_4 = 5$

n) $x = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ o) $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ p) $x = \frac{17}{2}$ q) $x = 9$ r) $x = 15$ s) no tiene

t) $x = 4$ u) $x_1 = 3$ y $x_2 = 7$ v) $x = \frac{8}{3}$

Resolución de problemas

1) ***Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado se forma otro cuadrado de 324 cm^2 de área. Calcula la medida del lado del cuadrado inicial.***

Sean "x" la medida del lado del cuadrado inicial. Al aumentar el lado 3 cm, el nuevo lado del cuadrado será de $x+3$.

$$(x+3)^2 = 324 \qquad x^2+9+6x=324 \qquad x^2+6x-315=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-315)}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+1260}}{2}=\frac{-6\pm 36}{2} \qquad x_1=\frac{-6+36}{2}=15 \qquad x_2=\frac{-6-36}{2}=-21$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado del cuadrado no puede ser negativo.

Comprobación: $(15+3)^2=324 \qquad 18^2=324 \qquad 324=324$

2) ***La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número da como resultado 78. Calcula dicho número.***

Sea "x" el número buscado. $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}=78$

$$\text{m.c.m.}(3,5)=15 \qquad 15\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}\right)=15\cdot 78 \qquad 5x^2+3x-1170=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(5)(-1170)}}{2\cdot 5}=\frac{-3\pm\sqrt{9+23400}}{10}=\frac{-3\pm 153}{10} \qquad x_1=\frac{-3+153}{10}=15 \qquad x_2=\frac{-3-153}{10}=-15'6$$

La solución válida es 15, ya que de las dos soluciones es la única que es un número entero.

Comprobación: $\frac{15^2}{3}+\frac{15}{3}=78 \qquad 75+5=78$

3) ***Una caja mide 5 cm de altura y de ancho mide 5 cm más que de largo. Su volumen es de 1500 cm^3. Calcula su longitud y su anchura.***

Sea "x" el largo de la caja.

$$1500=x(x+5)5 \qquad 1500=5x^2+25x \qquad 5x^2+25x-1500=0 \qquad x^2+5x-300=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(1)(-300)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{2}=\frac{-5\pm 35}{2} \qquad x_1=\frac{-5+35}{2}=15 \qquad x_2=\frac{-5-35}{2}=-20$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado de la caja no puede ser negativo. Por tanto, el largo es 15 cm, el ancho 20 cm y la altura es de 5 cm.

Comprobación: $1500=15\cdot(15+5)\cdot 5 \qquad 1500=15\cdot 20\cdot 5 \qquad 1500=1500$

4) ***Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos.***

Sea "x" uno de los lados. Los otros dos serán $x+1$ y $x+2$, por tanto, la hipotenusa será el $x+2$ que es el mayor. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \qquad x^2+4+4x = x^2+x^2+1+2x \qquad x^2+4+4x = 2x^2+1+2x$$

$$-x^2+2x+3=0 \qquad x^2-2x-3=0$$

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} \qquad x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

La solución válida es 3. Los lados del triángulo son 3, 4 y 5.

Comprobación: $(3+2)^2 = 3^2 + (3+1)^2 \qquad 5^2 = 3^2+4^2 \qquad 25 = 9+16$

5) ***Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.***

Sea "x" la medida de la altura. La base será $x-2$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$100 = x^2+(x-2)^2 \qquad 100 = x^2+x^2+4-4x \qquad 2x^2-4x-96=0 \qquad x^2-2x-48=0$$

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-48)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{4+192}}{2} = \frac{2\pm 14}{2} \qquad x_1 = \frac{2+14}{2} = 8 \qquad x_2 = \frac{2-14}{2} = -6$$

Las dimensiones son 8 cm de altura y 6 cm de base.

Comprobación: $100 = 8^2 + (8-2)^2 \qquad 100 = 64+36$

6) ***La suma de los cuadrados de dos números consecutivos positivos es 85. ¿Cuáles son los números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x^2+(x+1)^2 = 85 \qquad x^2+x^2+1+2x = 85 \qquad 2x^2+2x-84=0 \qquad x^2+x-42=0$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-42)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{2} = \frac{-1\pm 13}{2} \qquad x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7$$

La solución válida es 6, por tanto los números consecutivos positivos son 6 y 7.

Comprobación: $6^2 + (6+1)^2 = 85 \qquad 36+49 = 85$

7) ***El producto de dos números consecutivos positivos es 156. ¿Cuáles son esos números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x(x+1)=156 \qquad x^2+x=156 \qquad x^2+x-156=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-156)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+624}}{2}=\frac{-1\pm 25}{2} \qquad x_1=\frac{-1+25}{2}=12 \qquad x_2=\frac{-1-25}{2}=-13$$

La solución válida es 12 que es el número positivo, por tanto los números consecutivos positivos son 12 y 13.

Comprobación: $12(12+1)=156 \qquad 12\cdot 13=156$

8) ***El cuadrado de un número positivo, menos el triple del número, menos 7 es 11. ¿Cuál es el número?***

Sea "x" el número. $x^2-3x-7=11 \qquad x^2-3x-18=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm 9}{2} \qquad x_1=\frac{3+9}{2}=6 \qquad x_2=\frac{3-9}{2}=-3$$

La solución válida es 6 que es el número positivo.

Comprobación: $6^2-3\cdot 6-7=11 \qquad 36-18-7=11 \qquad 11=11$

9) ***El área de un rectángulo es 18 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones sabiendo que una es el doble que la otra?***

Sea "x" la base del rectángulo. La altura será 2x.

$$x\cdot 2x=18 \qquad 2x^2=18 \qquad x^2=\frac{18}{2}=9 \qquad x=\sqrt{9}=3$$

La solución válida es 3 que es la positiva, por tanto la base mide 3 y la altura 6.

Comprobación: $3\cdot 2\cdot 3=18 \qquad 18=18$

10) ***La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Cuántos años tienen ahora cada uno?***

Sea "x" la edad actual del hijo. La edad del padre será x^2.

$$x^2+24=2(x+24) \qquad x^2+24=2x+48 \qquad x^2-2x-24=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-24)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm 10}{2} \qquad x_1=\frac{2+10}{2}=6 \qquad x_2=\frac{2-10}{2}=-4$$

La solución válida es 6 que es la positiva, por tanto el hijo tiene 6 años y el padre 36.

Comprobación: $6^2+24=2(6+24) \qquad 60=60$

11) ***La suma de las edades de los 4 miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?***

Sea "x" la edad actual de la madre. La edad del padre será $x+6$.

$$x+x+6+2(x-27)=104 \qquad 2x+6+2x-54=104 \qquad 4x=152 \qquad x=38$$

La madre tiene 38 años, el padre 44 y los hijos gemelos $38-27=11$ años.

Comprobación: $38+38+6+2(38-27)=104 \qquad 82+2\cdot 11=104 \qquad 104=104$

12) ***Para construir una pirámide regular de base cuadrada y de 30 m de altura se han necesitado 2250 m³ de piedra. Calcula el lado de la base de la pirámide.***

Si "x" es el lado del cuadrado de la base de la pirámide, la fórmula que nos da el volumen es:

$$V=\frac{1}{3}\times \text{Área de la base}\times \text{altura}=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot 30$$

$$2250=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot 30 \qquad 6750=30x^2 \qquad x^2=\frac{6750}{30}=225 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{225}=15\,\text{m}$$

Comprobación: $2250=\frac{1}{3}\cdot 15^2\cdot 30 \qquad 2250=2250$

13) ***Busca los números que cumplan la siguiente condición: "La décima parte del número más los dos tercios de su cuadrado da un resultado nulo".***

Sea "x" el número que buscamos.

$$\frac{x}{10}+\frac{2}{3}x^2=0 \qquad 30\left(\frac{x}{10}+\frac{2}{3}x^2\right)=0 \qquad 3x+20x^2=0 \qquad 20x^2+3x=0$$

$$x(20x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ 20x+3=0 \qquad 20x=-3 \qquad x=\dfrac{-3}{20} \end{cases}$$

Comprobación: $\dfrac{\frac{-3}{20}}{10}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-3}{20}\right)^2=0 \qquad \dfrac{-3}{200}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{400}=0 \qquad \dfrac{-3}{200}+\dfrac{18}{1200}=0$

$$1200\cdot\frac{-3}{200}+1200\cdot\frac{18}{1200}=0 \qquad 6(-3)+18=0 \qquad -18+18=0$$