Septiembre 2010

OPCIÓN A

Problema A.1

a) Sea $A=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha^3 & 1\\ \alpha & \alpha & 1\\ \alpha^3 & \alpha & 1\end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^*=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha^3 & 1 & 1\\ \alpha & \alpha & 1 & 1\\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1\end{pmatrix}$ la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando $\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^*=3=\mathrm{n}^{\mathrm{o}}$ de incógnitas.

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha^3 & 1\\ \alpha & \alpha & 1\\ \alpha^3 & \alpha & 1\end{vmatrix}=\alpha^2(\alpha^2-1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=-1\\ \alpha=1\end{cases}$$

Si $\alpha\neq-1$ y $\alpha\neq0$ y $\alpha\neq1 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^*=3 \;\Rightarrow$ S.C.D.

b) Si $\alpha\neq-1$ ó $\alpha\neq0$ ó $\alpha\neq1 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^*=1 \;\Rightarrow$ S.C.I. Los tres planos coinciden.

c) Si $\alpha=-1$ las tres ecuaciones son de la forma $-x-y+z=1$, y las soluciones del sistema son:

$$z=\lambda \quad y=\mu \quad x=-1+\lambda-\mu \quad \text{ó} \quad (-1+\lambda-\mu,\mu,\lambda) \quad \text{con } \lambda,\mu\in\mathrm{R}$$

Si $\alpha=0$ las tres ecuaciones son de la forma $z=1$, y las soluciones del sistema son:

$$x=\lambda \quad y=\mu \quad z=1 \quad \text{ó} \quad (\lambda,\mu,1) \quad \text{con } \lambda,\mu\in\mathrm{R}$$

es decir, es un plano paralelo al XY a una distancia de una unidad.

Si $\alpha=1$ las tres ecuaciones son de la forma $x+y+z=1$, y las soluciones del sistema son:

$$z=\lambda \quad y=\mu \quad x=1-\lambda-\mu \quad \text{ó} \quad (1-\lambda-\mu,\mu,\lambda) \quad \text{con } \lambda,\mu\in\mathrm{R}$$

Problema A.2

a) Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes.

$$\overrightarrow{OA}=(6,-3,0)-(0,0,0)=(6,-3,0) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OB}=(3,0,1)-(0,0,0)=(3,0,1).$$

La ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-0\\ 6 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3x-6y+9z=0 \quad\Rightarrow\quad \pi\equiv x+2y-3z=0$$

b) El vector característico o normal del plano $\vec{n}=(1,2,-3)$ coincide con el vector de dirección de la recta, por ser la recta y el plano perpendiculares.

$$\vec{n}=(1,2,-3)=\vec{u}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $Q(8,7,-2)$ y es perpendicular al plano π son:

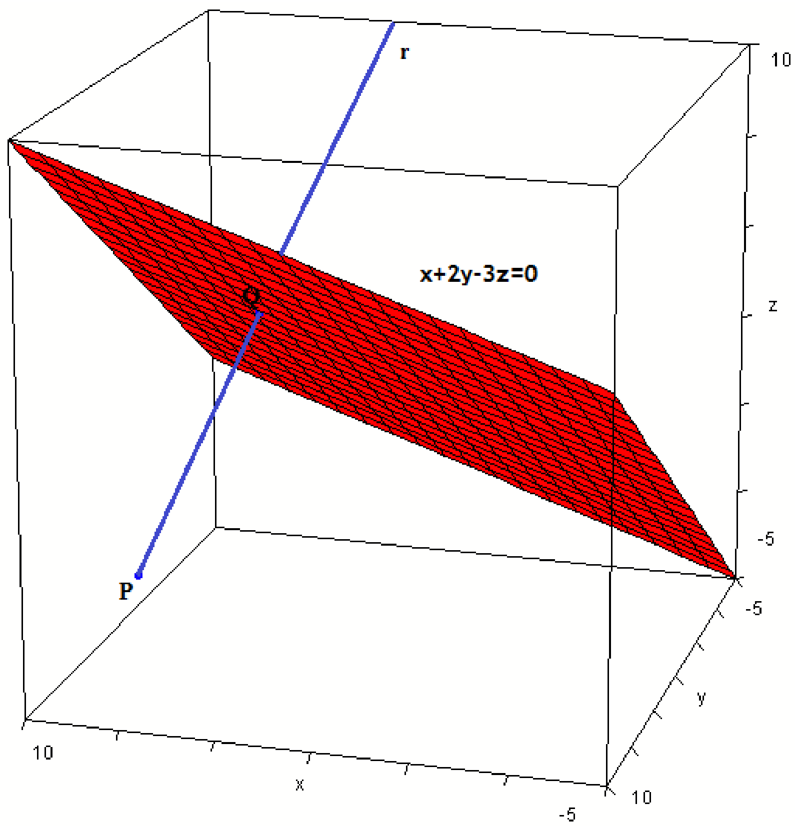
$$\begin{cases} x=8+t \\ y=7+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es la menor posible es el punto de corte de la recta r con el plano π. Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano.

$$8+t+2(7+2t)-3(-2-3t)=0 \quad \Rightarrow \quad t=-2$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de la recta se obtiene el punto Q.

$$\begin{cases} x=8-2=6 \\ y=7-4=3 \\ z=-2+6=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(6,3,4)$$



Problema A.3

a) Igualando las dos expresiones y resolviendo la ecuación resultante se obtienen los puntos de intersección entre ellas.

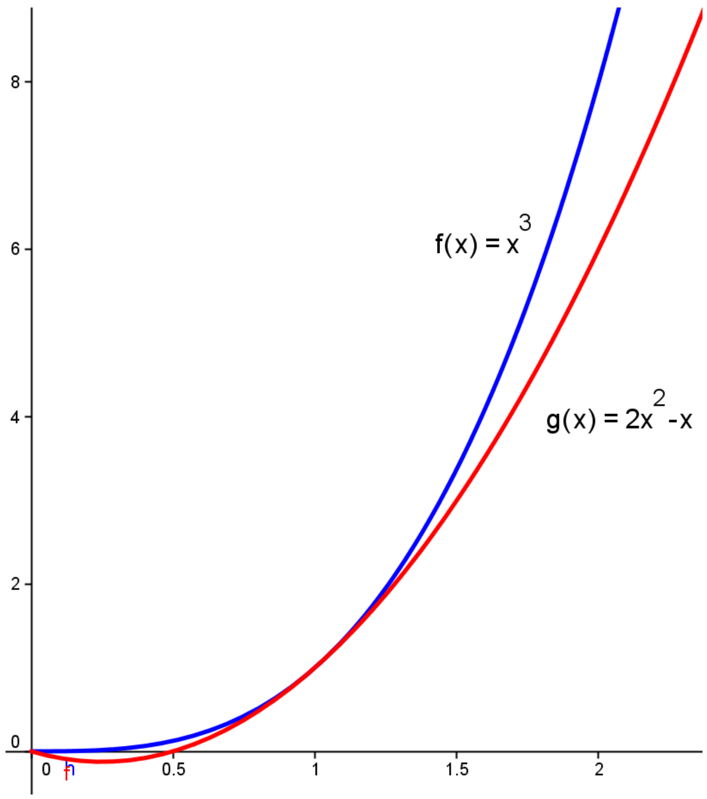
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \\ g(x)=2x^2-x \end{array}\right\} \qquad x^3=2x^2-x \qquad x^3-2x^2+x=0 \qquad x(x^2-2x+1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Los puntos son: $A(0,0)$ y $B(1,1)$

b) Tenemos que demostrar que $f(x)\geq g(x)$ o lo que es lo mismo que $f(x)-g(x)\geq 0 \;\; \forall x\geq 0$

$$x^3-2x^2+x\geq 0 \qquad x(x^2-2x+1)\geq 0 \qquad x(x-1)^2\geq 0$$

Lo que significa que $f(x)-g(x)\geq 0 \;\; \forall x\geq 0$ por tanto $f(x)\geq g(x) \;\; \forall x\geq 0$.



c) $A=\left|\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = \left|\left[\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-0\right]_0^1\right| = \frac{1}{12}u^2$

OPCIÓN B

Problema B.1

a) $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 \xrightarrow[F_3-F_2]{F_2-F_1} \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad 2x-6=6 \;\Rightarrow\; x=6$

b) Si multiplicamos todos los elementos de la matriz por 2, al calcular el determinante de dicha matriz podemos sacar fuera multiplicando un 2 de cada línea, por lo tanto :

$$|2\,A(x)| = 8|A(x)| = 8\cdot(2x-6) = 16x-48$$

c) $\begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[F_3-F_2]{F_2-F_1} \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales, por lo tanto $\nexists B^{-1}(y)$.

Problema B.2

a) $r: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-4}{2} = z-4 \quad y \quad s: x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$

Expresamos las dos ecuaciones de las rectas r y s en paramétricas y las igualamos.

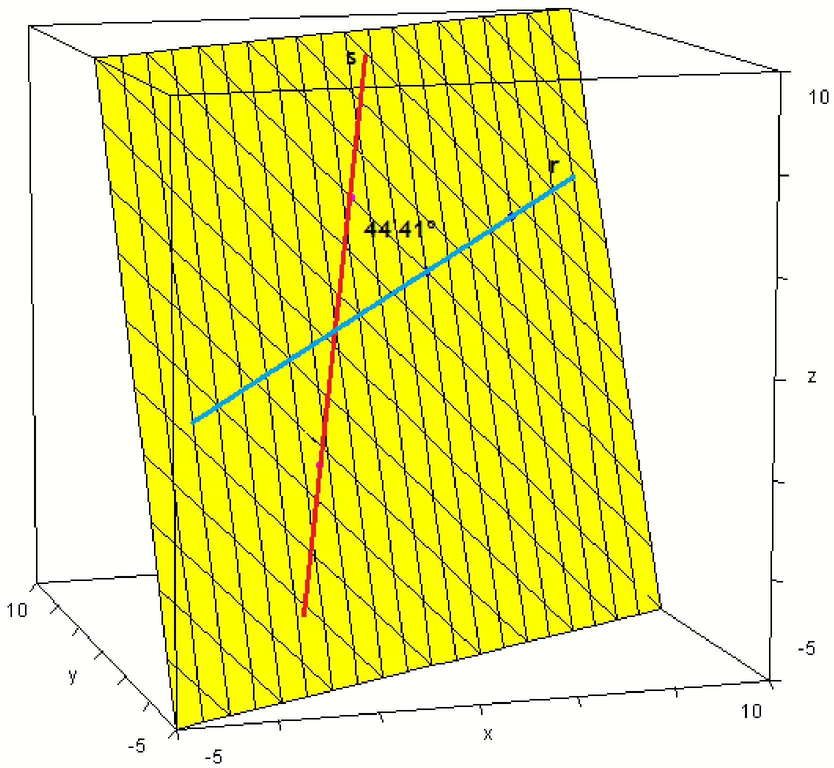
$$r:\begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=4+2\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=\mu \\ y=2\mu \\ z=3\mu \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} 4+3\lambda=\mu \\ 4+2\lambda=2\mu \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu=1 \\ \lambda=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

El punto P de intersección de las dos rectas es $P(1,2,3)$.

b) $\vec{u}_r = (3,2,1) \quad \vec{v}_s = (1,2,3) \quad \alpha = \arccos\dfrac{|(3,2,1)\cdot(1,2,3)|}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{1+4+9}} = \arccos\dfrac{10}{14} \Rightarrow \alpha = 44'415^{o}$

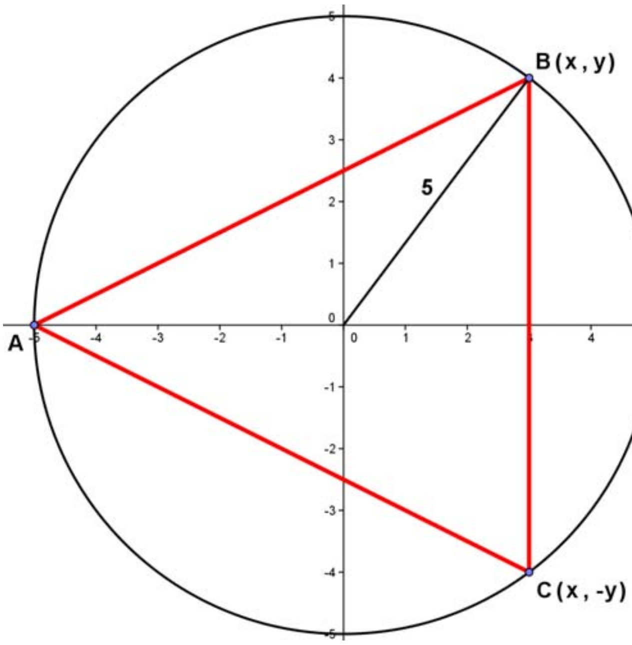
c) El plano π contiene al punto P y a los vectores de dirección de las dos rectas.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad x-2y+z=0$$



Problema B.3

a) $A = \dfrac{2y(x+5)}{2} = xy + 5y$



b) $\left.\begin{array}{l} A = y(x+5) \\ 25 = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \quad y = \sqrt{25 - x^2} \qquad A = \sqrt{25 - x^2}\,(x+5)$

$$A' = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}(x+5) + \sqrt{25 - x^2} = 0 \qquad \frac{-x^2 - 5x + 25 - x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \qquad 2x^2 + 5x - 25 = 0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{-5\pm 15}{4}\qquad\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{2}\\ x_2=-5\end{cases}$$

$f'(-6)<0$
$f'(0)>0$
$f'(3)<0$

Para $x=\frac{5}{2}$ el área es máxima, y por tanto $y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Los puntos tienen de coordenadas $B\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C\left(\frac{5}{2},-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

c) El valor máximo del área del triángulo es:

$$A\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}+5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}+50\sqrt{3}}{4}=\frac{75\sqrt{3}}{4}=32'47\,u^2$$