<u>*Septiembre 2009*</u>

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 30$

b) Podemos calcular la matriz inversa (ya que sabemos que $|A| \neq 0$) y luego su determinante, pero lo más rápido es aplicar la propiedad de los determinantes que dice que el determinante del producto de dos matrices cualesquiera es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas. Así tenemos:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{|I|}{|A|} = \frac{1}{\alpha^2 + 30}$$

Como en el problema nos dicen que el determinante de esta matriz inversa es $\frac{1}{66}$ tenemos:

$$\frac{1}{\alpha^2+30} = \frac{1}{66} \qquad \alpha^2 + 30 = 66 \qquad \alpha^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 6$$

Problema 1.2

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9$$

<u>Si $\alpha \neq 9$</u>

Como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3 \quad \Rightarrow$ S.C.D. El sistema solo admite la solución trivial $(0,0,0)$.

b) Si $\alpha \neq 9$

Un menor no nulo es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras y la podemos eliminar.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= -t \\ 2x + 3y &= -4t \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (t, -2t, t)$$

Bloque 2. GEOMETRÍA

Problema 2.1

a) El vector de dirección de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π coincide con el vector característico de éste.

$$\vec{u} = \vec{n} = (1, -2, 2) \quad \Rightarrow \quad x - 3 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2}$$

b) Se trata de encontrar el haz de planos que contiene a la recta r. Para ello pasamos la recta r de la forma continua a la expresión de la recta dada por el corte de dos planos.

$$x - 3 = \frac{y+1}{-2} \quad \rightarrow \quad -2x - y + 5 = 0$$

$$\frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2} \quad \rightarrow \quad 2y + 2z - 6 = 0$$

La ecuación del haz de planos que nos piden es:

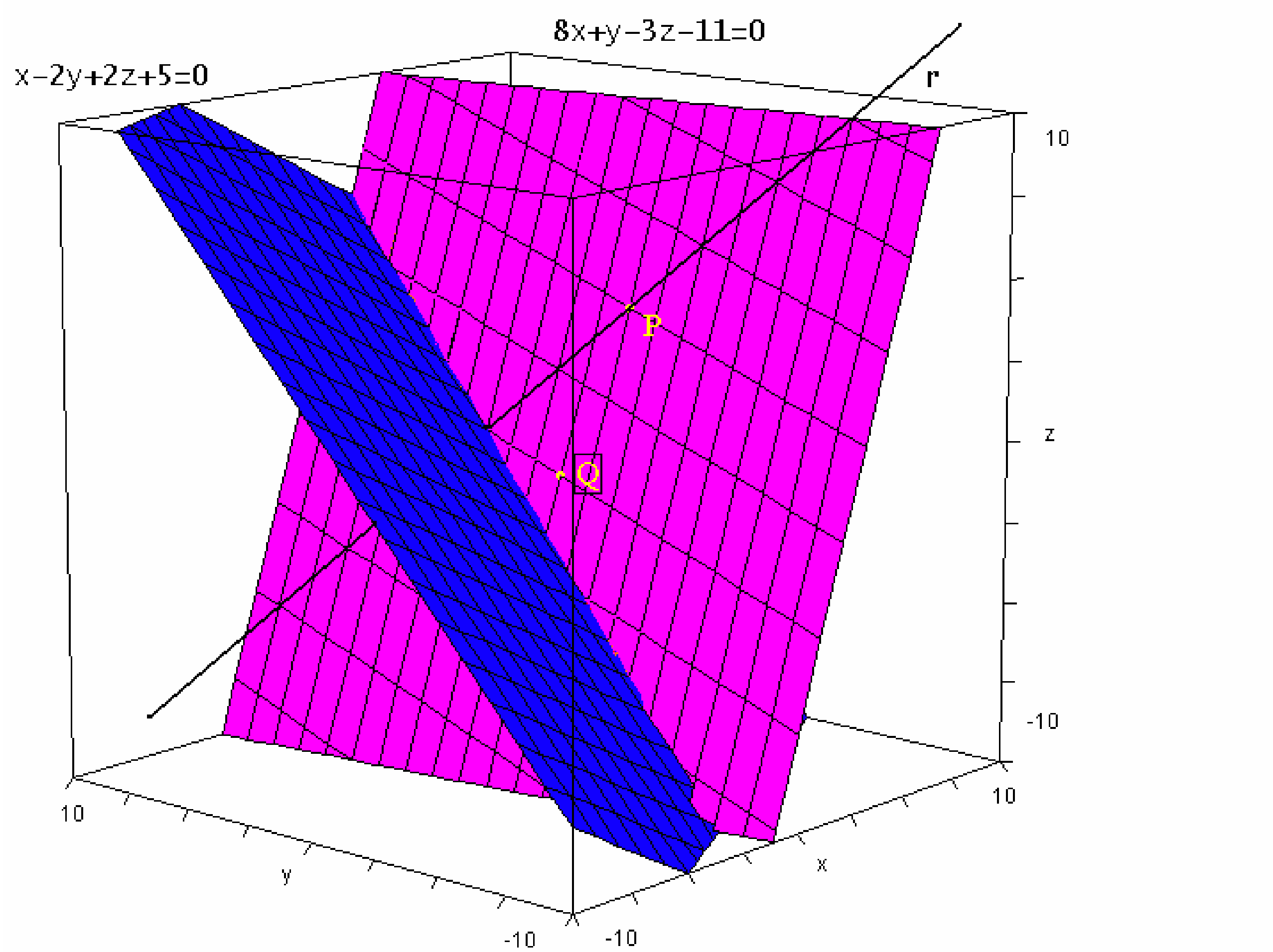
$$-2x - y + 5 + k(2y + 2z - 6) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x + (2k-1)y + 2kz + 5 - 6k = 0$$

c) La ecuación del haz de planos anterior nos da las ecuaciones de todos los planos que pasan por P y son perpendiculares a π. Si uno de ellos pasa por P y Q quiere decir que al sustituir las coordenadas del punto Q tiene que verificar la ecuación del haz de planos.

$$Q(1, 0, -1) \quad \rightarrow \quad -2\cdot 1 + (2k-1)\cdot 0 + 2k\cdot(-1) + 5 - 6k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{8}$$

La ecuación del plano que pasa por P y Q y es perpendicular a π es:

$$-2x + \left(2\cdot\frac{3}{8} - 1\right)y + 2\cdot\frac{3}{8}z + 5 - 6\cdot\frac{3}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + y - 3z - 11 = 0$$



Problema 2.2

a) Calculamos todos los puntos de coordenadas (x,y,z) cuya distancia al plano π sea de 5 unidades.

$$d(P,\pi)=\frac{|3x+2y+4z-12|}{\left|\sqrt{9+4+16}\right|}=5 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}3x+2y+4z-12=5\sqrt{29}\\ 3x+2y+4z-12=-5\sqrt{29}\end{cases}$$

Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π son:

$$\begin{cases}3x+2y+4z+14'92=0\\ 3x+2y+4z-38'92=0\end{cases}$$

b) Corte con OX $\rightarrow$ $y=z=0$ $\quad 3x-12=0 \quad x=4 \Rightarrow A(4,0,0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $x=z=0$ $\quad 2y-12=0 \quad y=6 \Rightarrow B(0,6,0)$

Corte con OZ $\rightarrow$ $x=y=0$ $\quad 4z-12=0 \quad z=3 \Rightarrow C(0,0,3)$

c) $\hat{A}=\arccos\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

$$\overrightarrow{AB}=(0,6,0)-(4,0,0)=(-4,6,0) \qquad \overrightarrow{AC}=(0,0,3)-(4,0,0)=(-4,0,3)$$

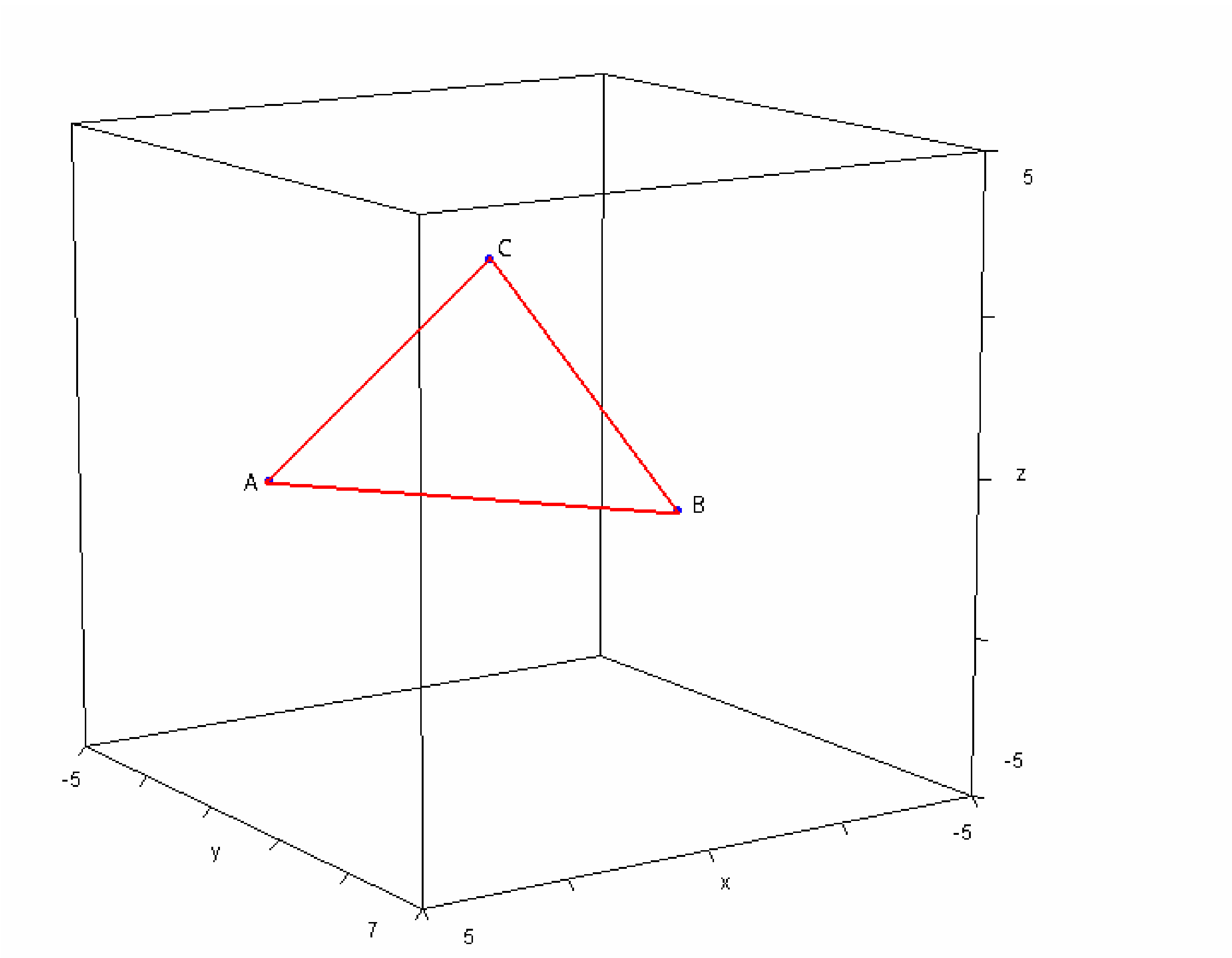
$$\hat{A}=\arccos\frac{|(-4,6,0)(-4,0,3)|}{\sqrt{16+36}\sqrt{16+9}}=\arccos\frac{16}{5\sqrt{52}}=63'65^{o}$$

$$\hat{B}=\arccos\frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\overrightarrow{BA}=(4,0,0)-(0,6,0)=(4,-6,0) \qquad \overrightarrow{BC}=(0,0,3)-(0,6,0)=(0,-6,3)$$

$$\hat{B}=\arccos\frac{|(4,-6,0)(0,-6,3)|}{\sqrt{16+36}\sqrt{36+9}}=\arccos\frac{36}{\sqrt{52}\sqrt{45}}=41'90^{o}$$

$$\hat{C}=180^{o}-\hat{A}-\hat{B}=180^{o}-63'65^{o}-41'90^{o}=74'43^{o}$$



Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}$

Asíntotas verticales

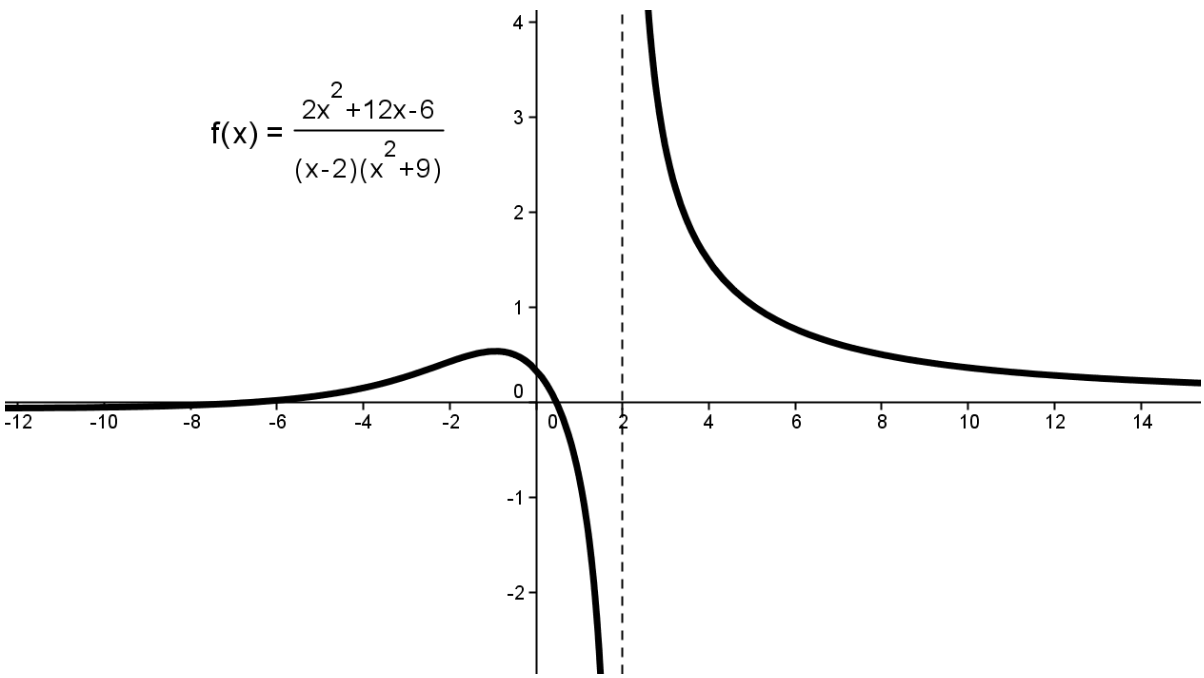
El único valor de x que anula el denominador es $x=2$. Puesto que este valor no anula el numerador podemos afirmar que en $x=2$ hay una asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=2.$$

Asíntotas horizontales

El grado del numerador (grado 2) es menor que el grado del denominador (grado 3), por tanto los límites de la función cuando x tiende a infinito tienden a cero. Hay una asíntota horizontal en $y=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=0$$



b) $H(x)=\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}=$$

$$2x^2+12x-6=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)\ \rightarrow\ \begin{cases}\text{Si } x=2 \quad 13A=26 \ \Rightarrow\ A=2\\ \text{Si } x=0 \quad 9A-2C=-6 \ \Rightarrow\ C=12\\ \text{Si } x=1 \quad 10A-B-C=8 \ \Rightarrow\ B=0\end{cases}$$

$$H(x)=\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx=\int\frac{A}{x-2}\,dx+\int\frac{Bx+C}{x^2+9}\,dx=\int\frac{2}{x-2}\,dx+\int\frac{12}{x^2+9}\,dx=$$

$$2\ln|x-2|+12\int\frac{dx}{9+x^2}=2\ln|x-2|+\frac{12}{9}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=2\ln|x-2|+\frac{12}{9}\cdot 3\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx=$$

$$2\ln|x-2|+4\,\mathrm{arctag}\left(\frac{x}{3}\right)+K$$

Como $H(3)=\frac{\pi}{3}\ \rightarrow\ 2\ln|1|+4\,\mathrm{arctag}1+K=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ 0+4\cdot\frac{\pi}{4}+K=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ K=-\frac{2\pi}{3}$

La función que nos piden es: $H(x)=2\ln|x-2|+4\,\mathrm{arctag}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$

Problema 3.2

a) $f(x)=\frac{8}{1+x^2}$ $\qquad f'(x)=\frac{-16x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad f''(x)=\frac{-16\cdot(1+x^2)^2+16x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$

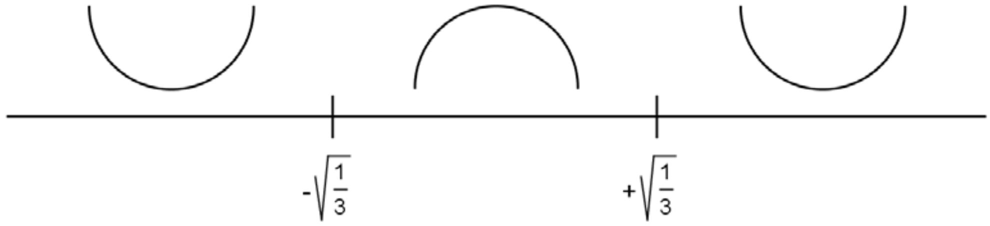
Simplificando numerador y denominador por $1+x^2$ obtenemos la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{-16\cdot(1+x^2)+16x\cdot 4x}{(1+x^2)^3}=\frac{48x^2-16}{(1+x^2)^3}$$

b) Los puntos de inflexión son aquellos en los que se anula la segunda derivada.

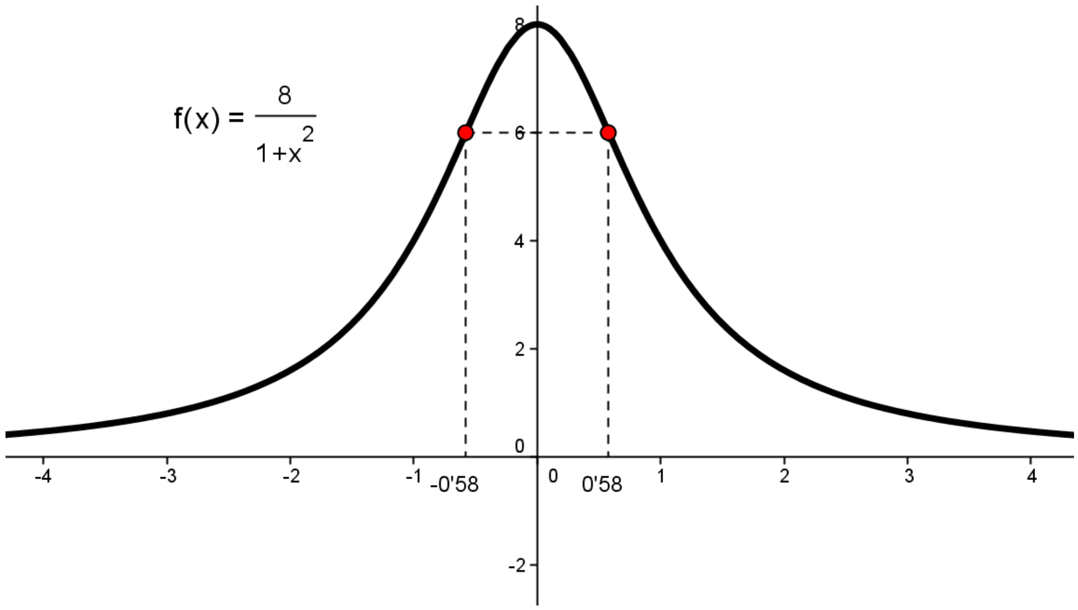
$$\frac{48x^2-16}{(1+x^2)^3}=0 \qquad 48x^2-16=0\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0'58$$

Para comprobar que son puntos de inflexión estudiamos la concavidad y convexidad.



Puesto que en $x = -0'58$ y $x = 0'58$ la función es continua y derivable, los puntos de inflexión son:

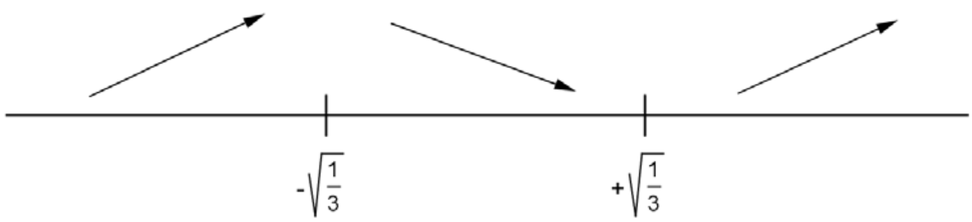
$$A(0'58, f(0'58)) = (0'58, 6) \quad y \quad B(-0'58, f(-0'58)) = (-0'58, 6)$$



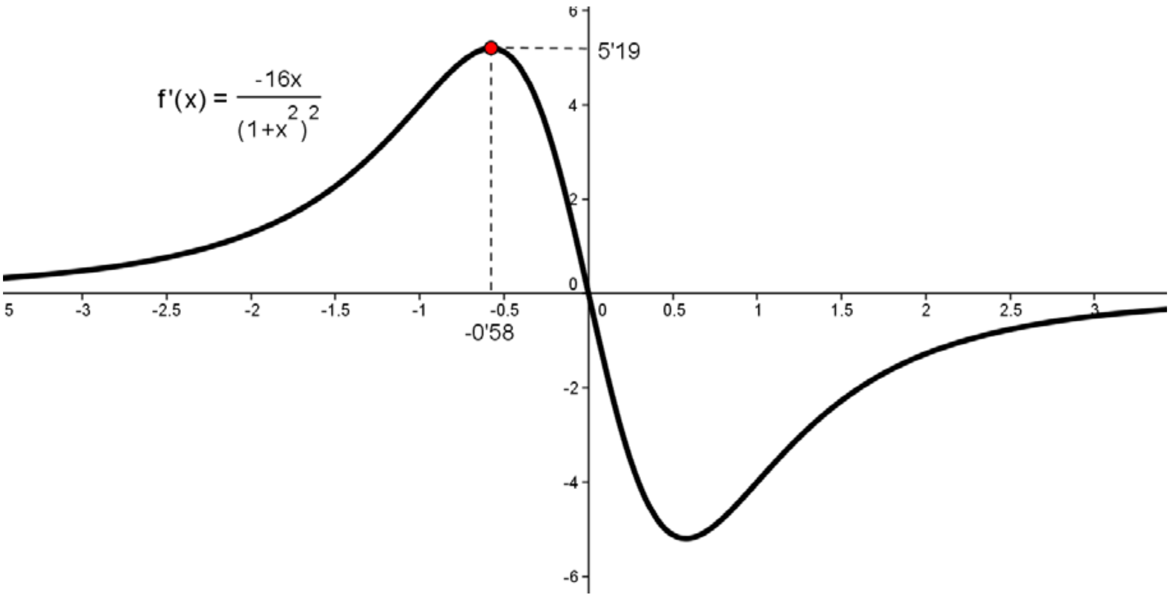
c) Por definición la derivada es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en cualquier punto. Calcular las pendientes *máximas* de las rectas tangentes equivale a calcular los máximos de la función primera derivada, es decir, a igualar a cero la segunda derivada.

A continuación estudiamos la monotonía de la función $f'(x) = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}$.

$$f''(x) = \frac{48x^2 - 16}{(1+x^2)^3} \qquad 48x^2 - 16 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x = -0'58 \\ x = 0'58 \end{cases}$$

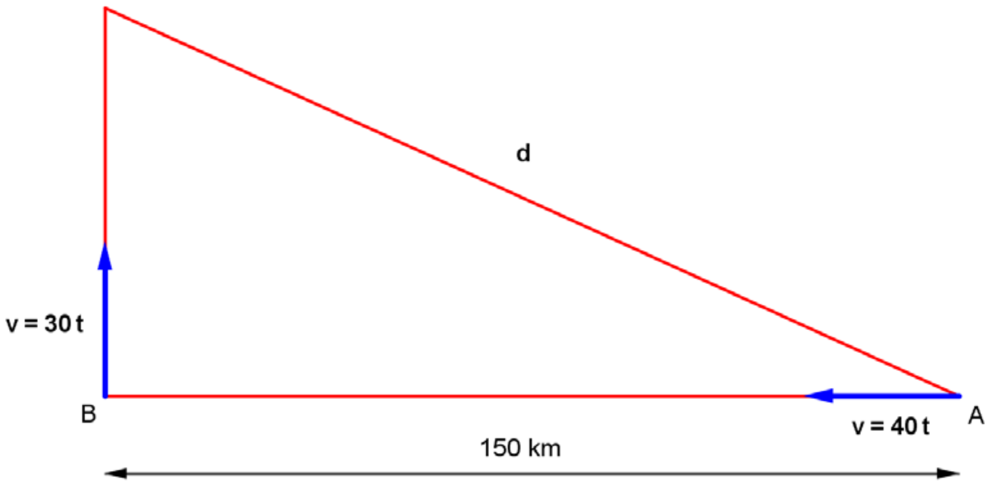


Como se observa en el diagrama, el máximo se obtiene en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-0'58$ y el punto en el que esto sucede es $P\left(-0'58, f'(-0'58)\right)=\left(-0'58, 5'19\right)$



Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 4.1



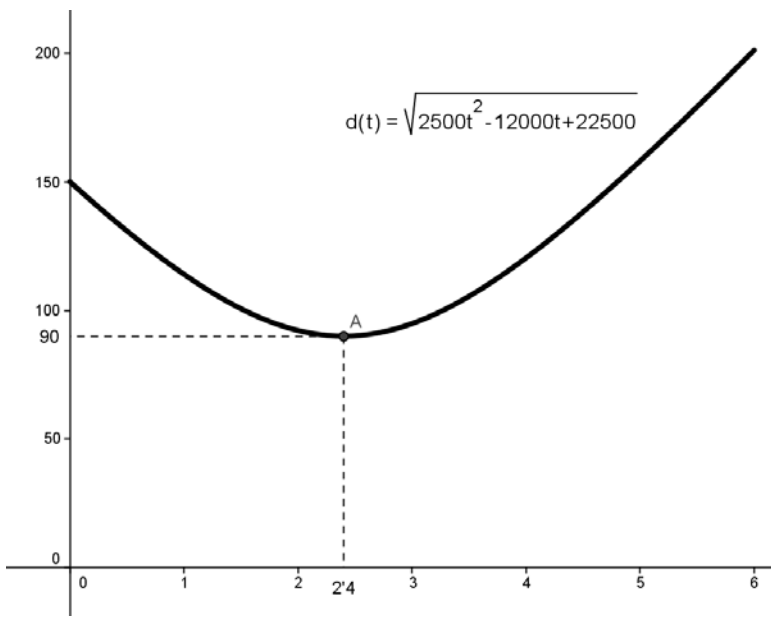
$$d(t) = \sqrt{(30t)^2 + (150-40t)^2} = \sqrt{2500\,t^2 - 12000\,t + 22500}$$

$$d'(t) = \frac{5000\,t - 12000}{2\sqrt{2500\,t^2 - 12000\,t + 22500}} = 0 \qquad 5000\,t - 12000 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2'4\,h$$

$d'(1) < 0$

$d'(3) > 0$

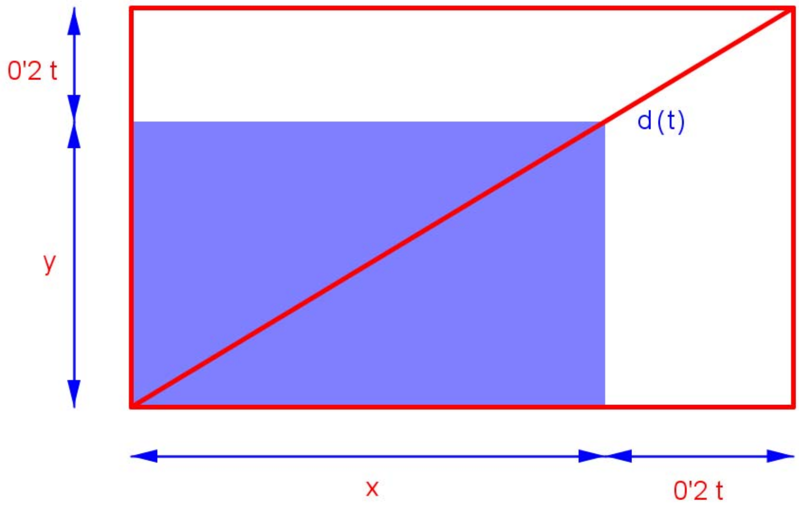
En $t = 2'4\,h$ hay un mínimo, lo que significa que al cabo de $2'4\,h$ la distancia es mínima y esto sucede a las $7\,h + 2'4\,h = 9'4\,h$. Esta distancia mínima es de $d(2'4) = 90\,km$. La gráfica que nos da la distancia entre las lanchas en función del tiempo es:



Problema 4.2

a) Supongamos que en el instante inicial $(t = 0)$ las dimensiones de la lámina metálica rectangular son "x" mm. de largo e "y" mm. de ancho

A causa de la dilatación por calentamiento, la base y la altura aumentan en función del tiempo una cantidad igual a $0'2t$ $(e = vt)$, con lo que al cabo de t minutos las nuevas dimensiones de la lámina metálica son: $x + 0'2t$ e $y + 0'2t$



En un instante determinado "t", la diagonal de la lámina metálica viene dada, aplicando el teorema de Pitágoras, por la expresión:

$$d(t) = \sqrt{(x + 0'2t)^2 + (y + 0'2t)^2}$$

La velocidad de crecimiento de la diagonal viene dada por su derivada con respecto al tiempo.

$$v(t) = d'(t) = \frac{2(x + 0'2t)\cdot 0'2 + 2(y + 0'2t)\cdot 0'2}{2\sqrt{(x + 0'2t)^2 + (y + 0'2t)^2}} = \frac{(x + 0'2t)\cdot 0'2 + (y + 0'2t)\cdot 0'2}{\sqrt{(x + 0'2t)^2 + (y + 0'2t)^2}}$$

En el instante en que las dimensiones de la lámina sean de 80 mm y 60 mm, es decir, en el instante en que $x + 0'2t = 80\,mm$ e $y + 0'2t = 60\,mm$ la velocidad de crecimiento será:

$$v(t) = \frac{80\cdot 0'2 + 60\cdot 0'2}{\sqrt{80^2 + 60^2}} = 028\ {}^{mm}\!/_{min}$$