Septiembre 2008

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) $A\,X = 0\,X$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+4y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $A\,X = 3\,X$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3x \\ 2x+4y=3y \end{array}\right\} \rightarrow \; y=-2x \; \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}$$

c) $A\,X = 2\,X$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2x \\ 2x+4y=2y \end{array}\right\} \rightarrow \; y=-x \; \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

Problema 1.2

a) Por el teorema de Rouché Fröbenius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Si $\alpha = 0$</u>

Un menor de orden 2 no nulo es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\Rightarrow\; rgA = 2$

El rango de A^* es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; rgA^* = 2$

Como $rg\,A = rg\,A^* = 2 < 3 \;\Rightarrow\;$ S.C.I. (sistema compatible indeterminado)

Si $\alpha \neq 0$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3 \quad \Rightarrow \quad$ S.C.D. (sistema compatible determinado)

Hay infinitos sistemas, uno para cada valor de $\alpha \neq 0$, todos ellos compatibles determinados.

b) El sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 0$, como se ha explicado en el apartado anterior.

c) El sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=4 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado. Como la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras la podemos eliminar.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=3-\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4-2\lambda}{3} \\ y=\dfrac{5-\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \left(\frac{4-2\lambda}{3}, \frac{5-\lambda}{3}, \lambda\right)$$

Bloque 2. GEOMETRÍA

Problema 2.1

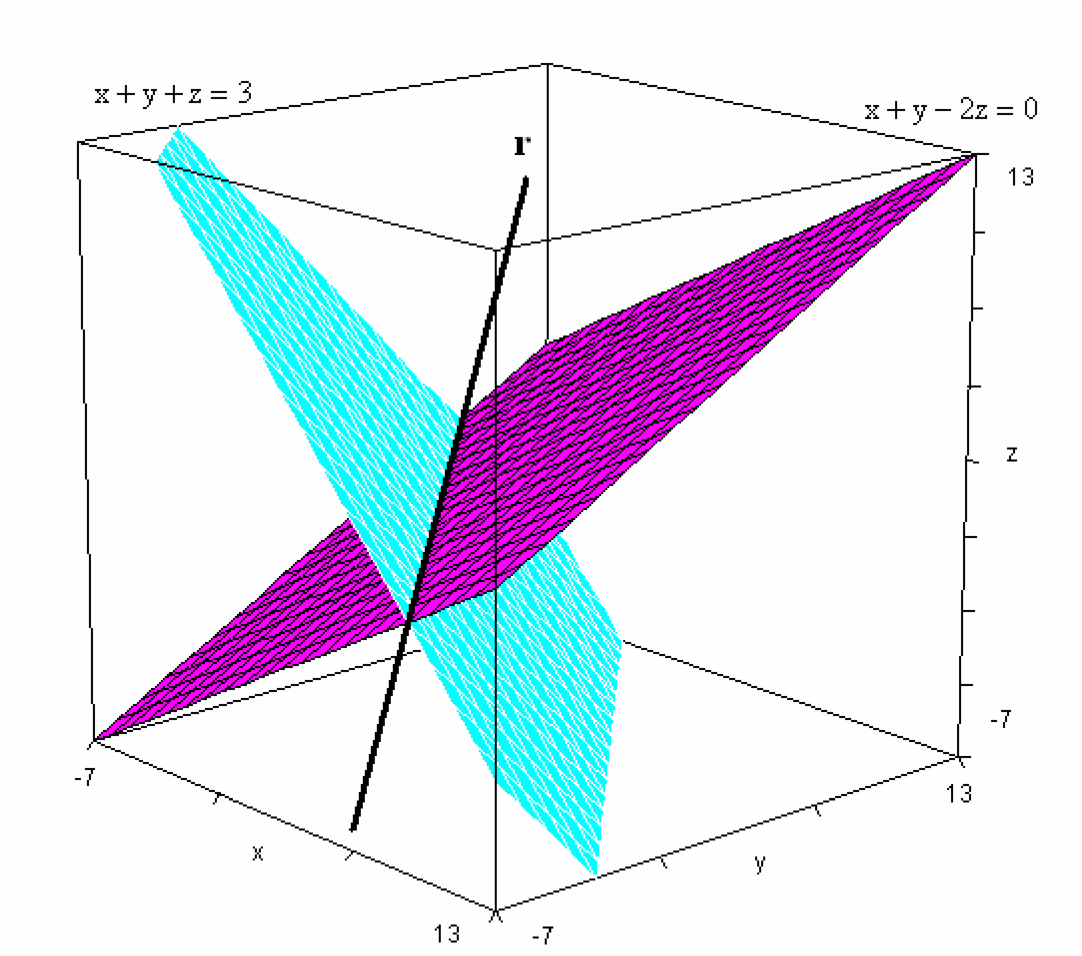
a) Sea $\vec{u} = (1,1,1)$ el vector característico del plano π_1 y $\vec{v} = (1,1,-\alpha)$ el de π_2.

Para que los planos sean perpendiculares se debe de verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(1,1,1)(1,1,-\alpha) = 0 \qquad 1+1-\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+z=3-\lambda \\ x-2z=-\lambda \end{array}\right\} \qquad 3z=3 \quad \Rightarrow \quad z=1$$

$$x = 3-\lambda-1 = 2-\lambda \qquad \Rightarrow \qquad r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$



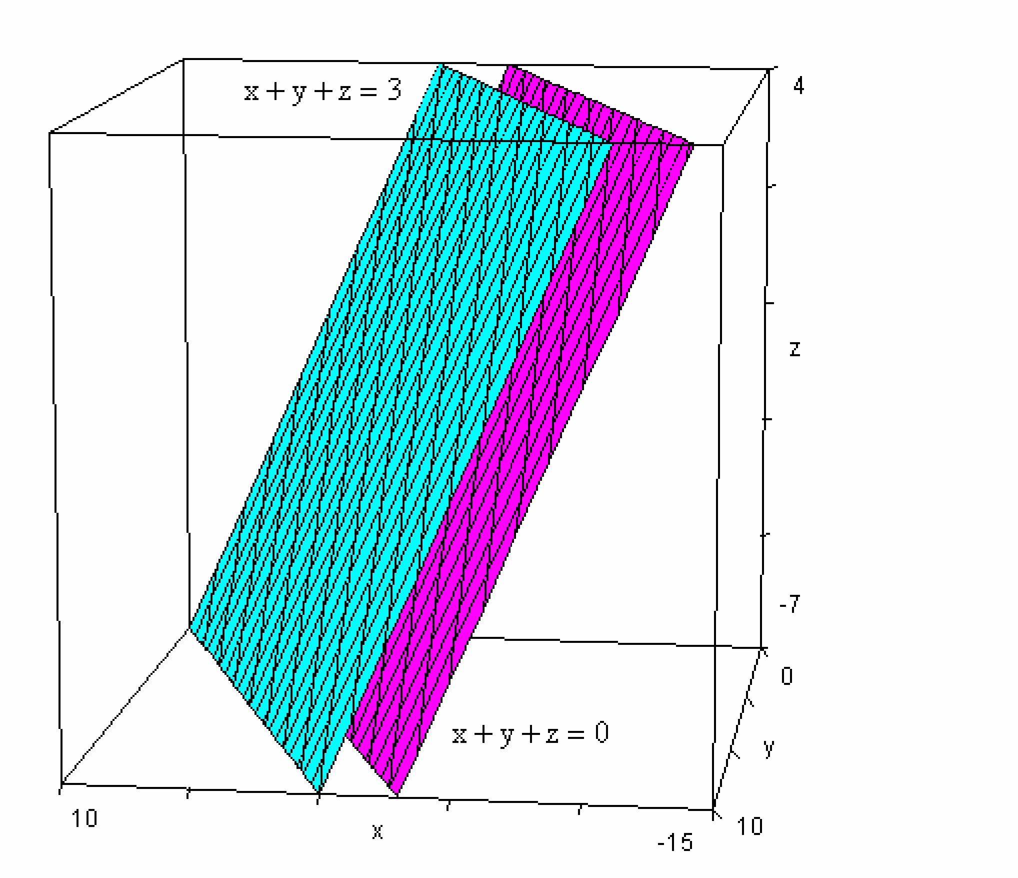
b) Para que los planos sean paralelos se debe de verificar que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$$(1,1,1) = k \cdot (1,1,-\alpha) = (k,k,-k\alpha) \qquad \begin{cases} 1 = k \\ 1 = k \\ 1 = -k\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

Para $\alpha = -1$ tenemos: $\pi_1 : x + y + z - 3 = 0 \qquad \pi_2 : x + y + z = 0$

La distancia entre los dos planos paralelos es la misma que la distancia desde un punto $P(0,0,3)$ de π_1 al plano π_2.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ u.l.}$$



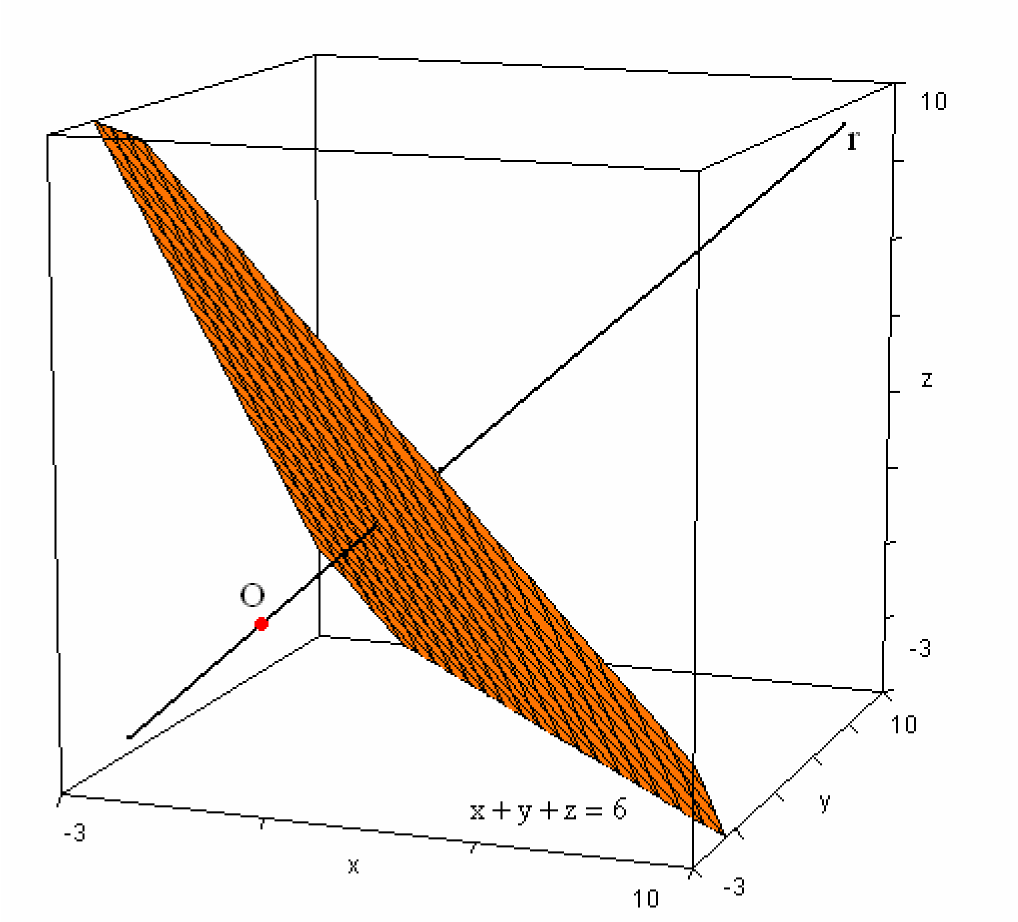
Problema 2.2

a) El vector de dirección de la recta r y el vector característico del plano π son proporcionales por ser la recta perpendicular al plano. Un posible vector de dirección de r es $\vec{u} = (1,1,1)$.

La ecuación continua de la recta r es: $\left.\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}\right\}$

Las ecuaciones paramétrícas de la recta r son: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right\}$

La ecuación general de la recta r es: $\left.\begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$



b) El punto de corte entre la recta y el plano será el punto medio del segmento que une el punto O y su simétrico O' respecto del plano π. Las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema formado por la recta y el plano.

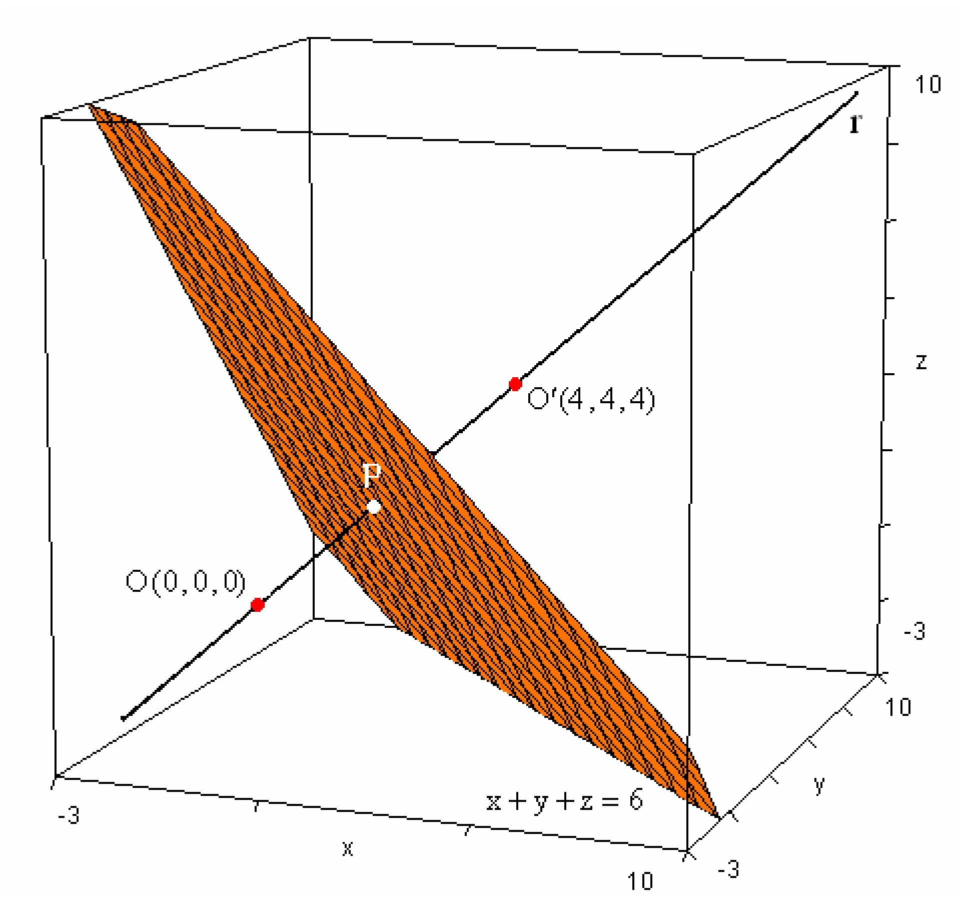
Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano se obtiene:

$$t + t + t = 6 \qquad 3t = 6 \qquad t = 2$$

Las coordenadas del punto medio son $P(2,2,2)$.

Las coordenadas del punto simétrico O' son:

$$2 = \frac{x+0}{2} \Rightarrow x = 4 \qquad 2 = \frac{y+0}{2} \Rightarrow y = 4 \qquad 2 = \frac{z+0}{2} \Rightarrow z = 4 \qquad O'(4,4,4)$$



c) Un vector de dirección de la recta que contiene al eje OX es $\vec{v}=(1,0,0)$, un punto de la recta r es el $(0,0,0)$ y un vector de dirección de la recta r es $\vec{u}=(1,1,1)$.

La ecuación del plano que contiene al eje OX y a la recta r es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = z-y=0 \quad \Rightarrow \quad y-z=0$$

Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a) $\int_1^{x+1}(at+b)\,dt=\left[\frac{at^2}{2}+bt\right]_1^{x+1}=\frac{a(x+1)^2}{2}+b(x+1)-\left(\frac{a}{2}+b\right)=\frac{ax^2+2(a+b)x}{2}$

b) $F(x)=x\cdot\int_1^{x+1}(ax+b)\,dx=x\cdot\frac{ax^2+2(a+b)x}{2}=\frac{ax^3}{2}+(a+b)x^2$

$$F'(x)=\frac{3ax^2}{2}+2(a+b)x$$

c) $F''(x)=3ax+2(a+b)$ $\quad F''(0)=3a\cdot 0+2(a+b)=0$ $\quad 2a+2b=0 \;\Rightarrow\; a=-b$

Problema 3.2

a) Al ser $\alpha > 0$ nos indica que toda la parábola está por encima del eje OX, con lo que no hay puntos de corte con dicho eje.

$$A = \left|\int_0^{\sqrt{6}} (x^2 + \alpha)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} + \alpha x\right]_0^{\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{3} + \alpha\sqrt{6} - 0\right| = 2\sqrt{6} + \sqrt{6}\,\alpha$$

b) Tenemos que calcular el área del rectángulo, y posteriormente la superficie del rectángulo que no está comprendida entre la parábola y el eje OX. Igualando esta superficie con la del apartado a) obtendremos el valor de α.

La altura del rectángulo se obtiene sustituyendo $x = \sqrt{6}$ en la función $g(x) = x^2 + \alpha$

$$g(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 + \alpha = 6 + \alpha$$

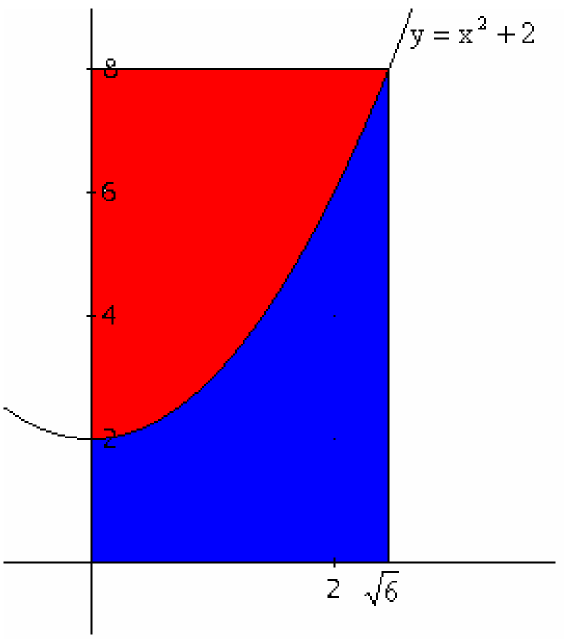
El área comprendida entre la recta $f(x) = \sqrt{6} + \alpha$ y la parábola $g(x) = x^2 + \alpha$ es:

$$A = \left|\int_0^{\sqrt{6}} [f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\int_0^{\sqrt{6}} [6 + \alpha - (x^2 + \alpha)]dx\right| = \left|\int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2)\,dx\right| =$$

$$\left|\left[6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6}}\right| = \left|6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 0\right| = 4\sqrt{6}\ u^2$$

Igualando las dos áreas tenemos: $2\sqrt{6} + \sqrt{6}\alpha = 4\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$.

Para este valor de α el área de la parte colorada y de la parte azul son iguales.



Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 4.1

a) La distancia recorrida por el móvil al cabo de t segundos viene dada por la expresión $e = v\,t$, es decir, $y = 2\,t$.

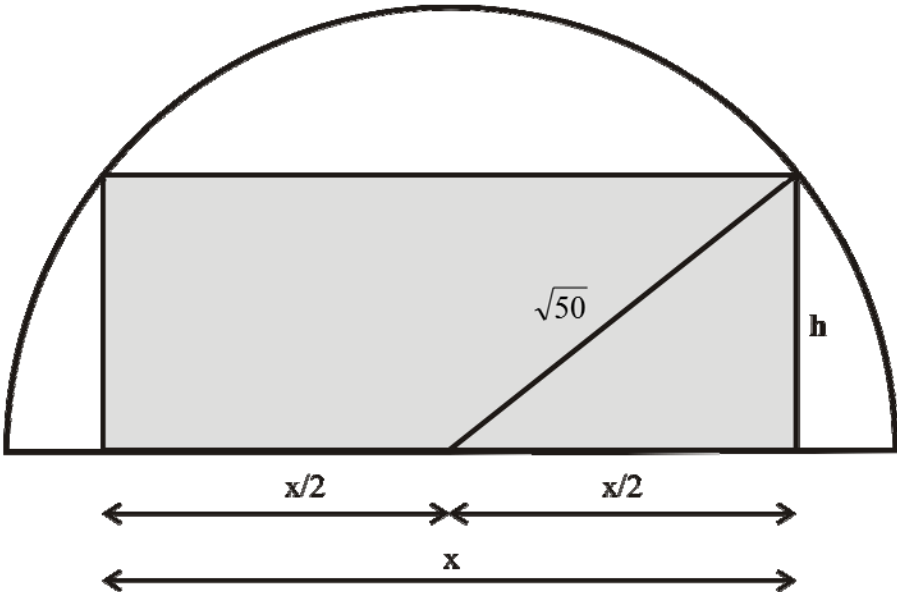
Las coordenadas del punto $M(t)$ al cabo de t segundos son $(1, 2t)$.

b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $O = (0,0)$ y $M(t) = (1, 2t)$ es:

$$m(t) = \frac{2t-0}{1-0} = 2t$$

c) $m'(t) = 2$

Problema 4.2



a) De la figura se deduce que el área del rectángulo es: $A = x \cdot h$

Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura se obtiene:

$$\left(\sqrt{50}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad 50 = h^2 + \frac{x^2}{4} \qquad 200 = 4h^2 + x^2 \qquad h = \sqrt{\frac{200-x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{200-x^2}$$

$$A = \frac{x \cdot \sqrt{200-x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{200\,x^2 - x^4}$$

b) Derivando esta expresión e igualando a cero calculamos el valor de x para el cual el área es máxima.

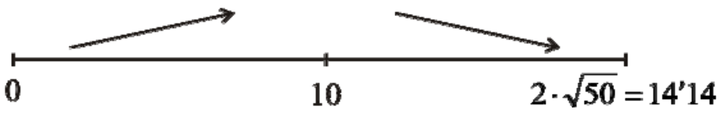
$$A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{400x - 4x^3}{2\sqrt{200x^2 - x^4}} = 0 \qquad 400x - 4x^3 = 0 \qquad 4x(100 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x = 0 \quad \to \quad x = 0 \\ 100 - x^2 = 0 \quad \to \quad x = 10 \end{cases}$$

Veamos que para $x = 10\,\text{m}$ el área es máxima.

$A'(5) > 0$

$A'(12) < 0$



Por tanto el área máxima se obtiene cuando $x = 10\,\text{m}$ y $h = \sqrt{\dfrac{200 - 10^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100} = 5\,\text{m}$, y su valor es:

$$A = x \cdot h = 10 \cdot 5 = 50\,\text{m}^2$$