Septiembre 2007

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) Por el teorema de Rouché Fröbenius $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$

$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A^* = 3.$

Como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3 \Rightarrow$ S.C.D. y por tanto el sistema tiene una única solución.

b) Resolviendo el sistema por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{5-\alpha}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} = \frac{4-3\alpha}{10}$$

c) $\frac{5-\alpha}{5} + \frac{3\alpha-3}{5} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1 \qquad \frac{10-2\alpha+6\alpha-6+4-3\alpha}{10} = 1 \Rightarrow \alpha = 2$

Problema 1.2

a) $AX = \alpha X \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6x+4y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} 6x+4y = \alpha x \\ -x+y = \alpha y \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 6x+4y-\alpha x = 0 \\ -x+y-\alpha y = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (6-\alpha)x+4y = 0 \\ -x+(1-\alpha)y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Es un sistema homogéneo, y para que la solución $(0,0)$ sea la única, se debe verificar que el determinante de los coeficientes del sistema sea distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 5 \end{cases}$ Los valores de α son $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$.

b) $AX = 2X \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6x+4y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} 6x+4y = 2x \\ -x+y = 2y \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x+y = 0 \\ -x-y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad y = -x \Rightarrow$$ S.C.I. cuya solución es $(x,-x)$.

Bloque 2. GEOMETRÍA

Problema 2.1

a) Sea $\pi : 2x + y + 3z - 1 = 0$ y $Q = (2,1,3)$

$$d(Q,\pi) = \frac{2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}} = 3'47$$

b) Intersección del plano π con los ejes de coordenadas:

Con el eje OX: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1(0'5,0,0)$

Con el eje OY: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2(0,1,0)$

Con el eje OZ: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$

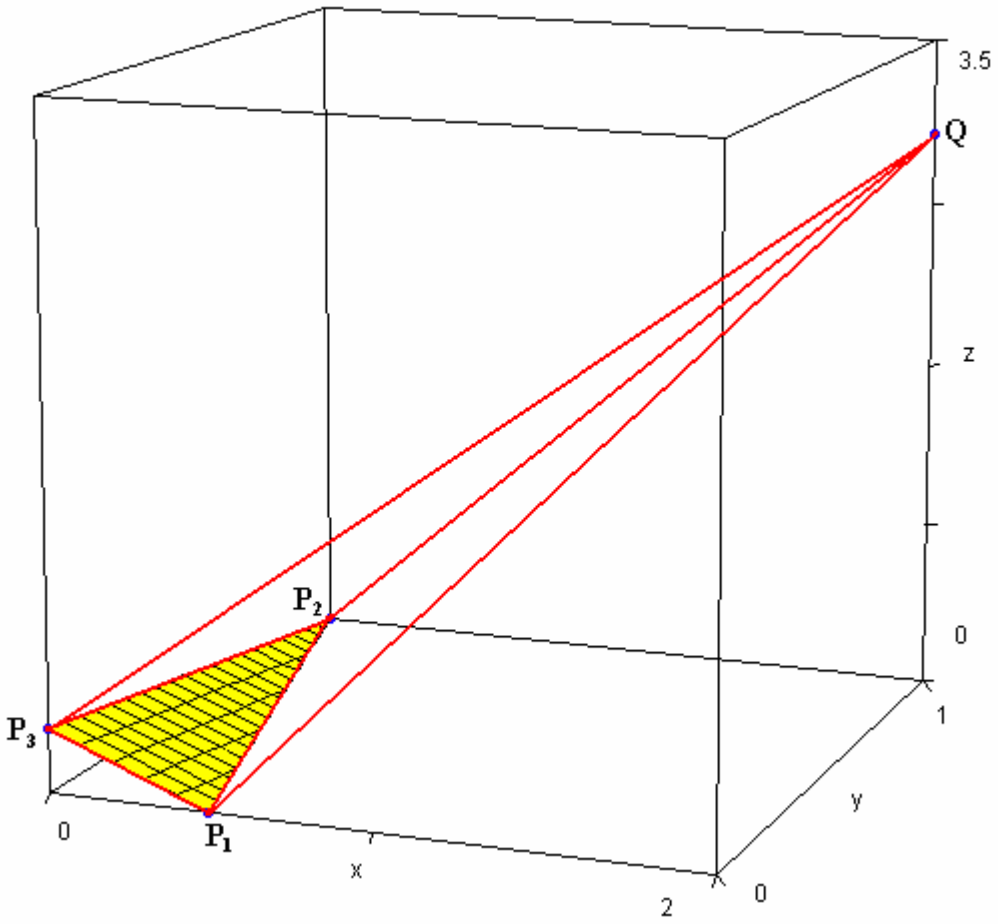
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,0) - (0'5,0,0) = (-0'5,1,0) \quad y \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \left(0,0,\frac{1}{3}\right) - (0'5,0,0) = \left(-0'5,0,\frac{1}{3}\right)$$

$$A = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right|}{2} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0'5 & 1 & 0 \\ -0'5 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{12}\ u^2$$

c) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-0'5,1,0)$ $\overrightarrow{P_1P_3} = \left(-0'5,0,\frac{1}{3}\right)$ $\overrightarrow{P_1Q} = (1'5,1,3)$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -0'5 & 1 & 0 \\ -0'5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1'5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0'3611\ u^3$$

o también $V = \frac{1}{3}A\cdot h = \frac{1}{3}A\cdot d(Q,\pi) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}}{12}\cdot\frac{13}{\sqrt{14}} = \frac{13}{36} = 0'3611\ u^3$



Problema 2.2

a) Sabemos que los vectores característicos de π_1 y π_2 son $\vec{n} = (1,2,1)$ y $\vec{n'} = (2,1,-1)$, por tanto:

$$\alpha = \arccos \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|} = \arccos \frac{\left|(1,2,1)(2,1,-1)\right|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \arccos \frac{\left|2+2-1\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \arccos\frac{1}{2} = 60^o$$

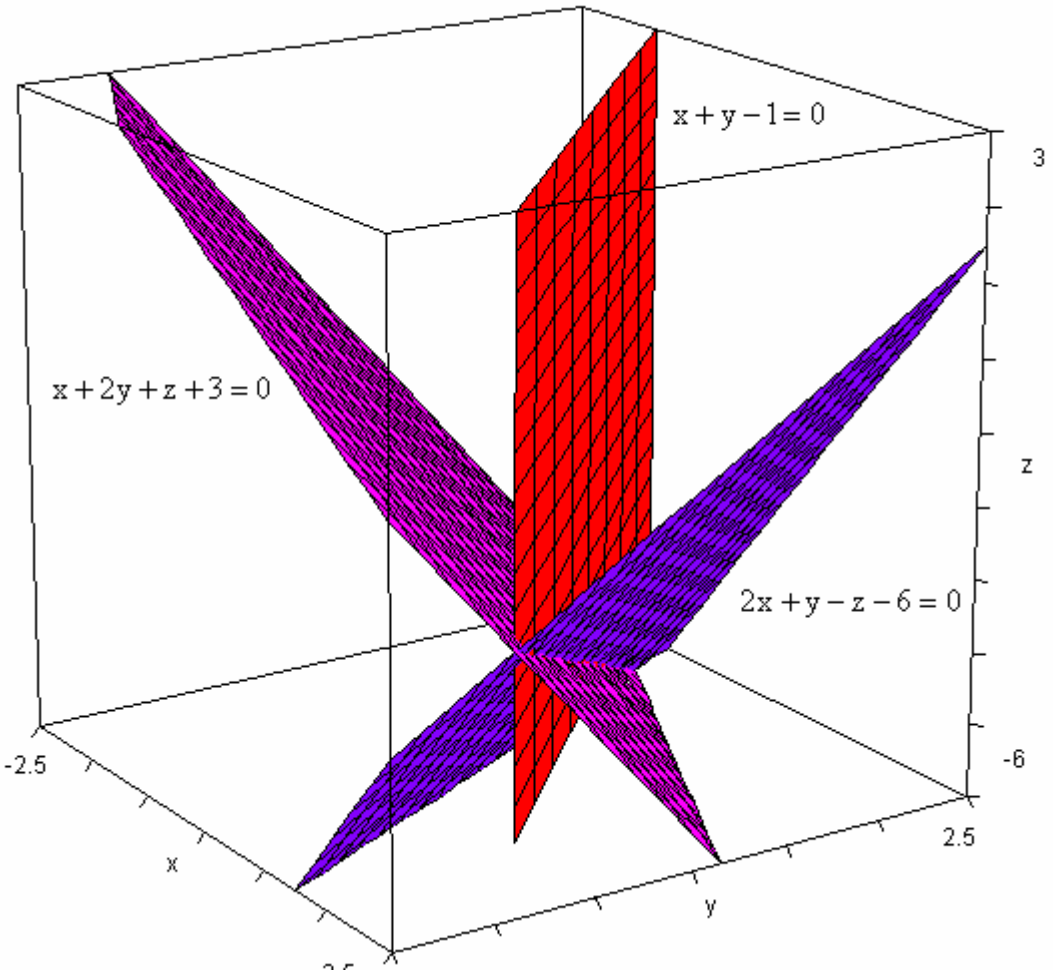
b) La recta intersección de los planos π_1 y π_2 se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-6=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+2y=-3-\lambda \\ 2x+y=6+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

c) El vector característico del plano π es $\vec{u} = (1,1,0)$, por tanto éste plano debe formar con los otros dos un ángulo de 30º.

$$\beta = \arccos \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|} = \arccos \frac{\left|(1,2,1)(1,1,0)\right|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \arccos \frac{\left|1+2+0\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \arccos\frac{3}{\sqrt{12}} = 30^o$$

$$\gamma = \arccos \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{n'}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|} = \arccos \frac{|(1,1,0)(1,2,1)|}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{1+4+1}\cdot} = \arccos \frac{|1+2+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{12}} = 30^{o}$$



Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}$

Asíntotas horizontales

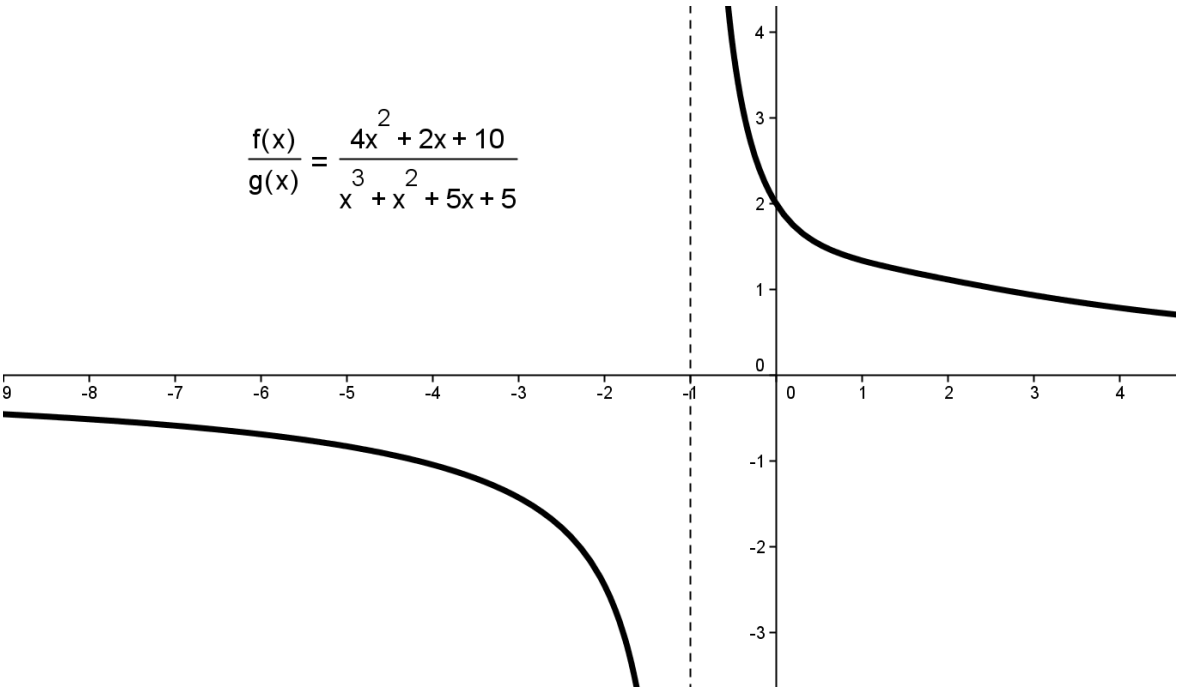
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales

El polinomio del numerador no tiene raíces reales y el polinomio del denominador $x^3+x^2+5x+5=0$ solo tiene una raíz real $x=-1$, por lo tanto la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.



b) $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx$

$$\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}=\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+5)}=$$

Para $x=-1$ $\quad 12=6A \;\Rightarrow\; A=2$

Para $x=0$ $\quad 10=5A+C \;\Rightarrow\; C=0$

Para $x=1$ $\quad 16=6A+2B+2C \;\Rightarrow\; B=2$

Por tanto:

$$H(x)=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{2x}{x^2+5}dx=2\ln|x+1|+\ln|x^2+5|+k$$

Como $H(0)=0$ $\quad 2\ln|1|+\ln|5|+k=0 \;\Rightarrow\; k=-\ln 5$, por tanto:

$$H(x)=2\ln|x+1|+\ln|x^2+5|-\ln 5=\ln\frac{(x+1)^2(x^2+5)}{5}$$

Problema 3.2

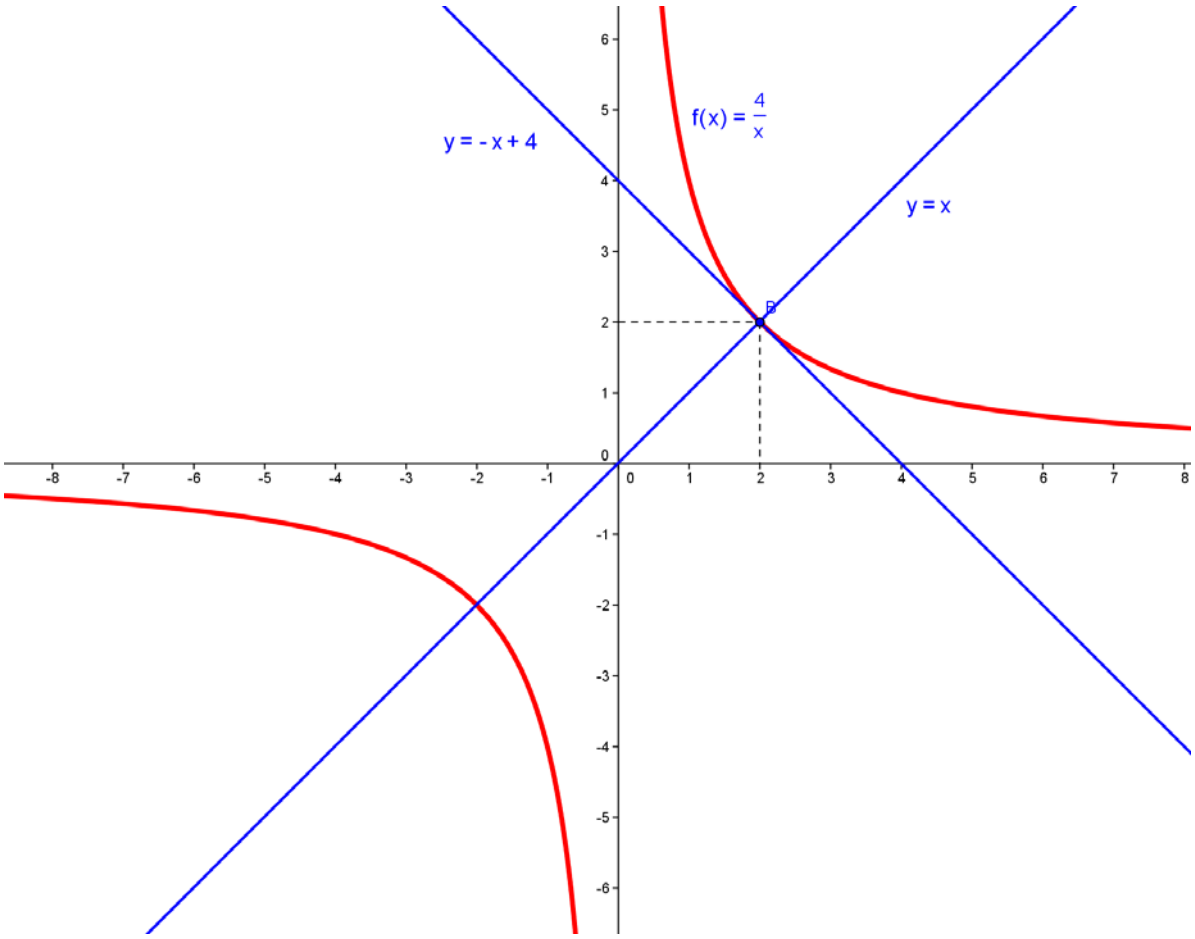
a) La ordenada del punto $x = 2$ es $f(2) = 2$ y como $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$ se verifica $f'(2) = -\dfrac{4}{4} = -1$.

La ecuación de la recta tangente es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$y - 2 = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 4$$

La ecuación de la recta normal es: $y - f(2) = -\dfrac{1}{f'(2)}(x - 2)$

$$y - 2 = (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = x$$



b) Las rectas tangentes tienen por ecuación $y - y_0 = -\dfrac{4}{x_0^2}(x - x_0)$, donde (x_0, y_0) es el punto de tangencia.

Como las tangentes se cortan en el punto $P(4, -8)$ pasan por dicho punto y deben verificar su ecuación.

$$-8 - y_0 = -\frac{4}{x_0^2}(4 - x_0) \qquad -8 - y_0 = -\frac{16}{x_0^2} + \frac{4}{x_0} \qquad y_0 = \frac{16 - 4x_0 - 8x_0^2}{x_0^2}$$

Por otro lado, el punto de tangencia pertenece a la curva, por lo tanto debe de verificar su ecuación $y_0 = \frac{4}{x_0}$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

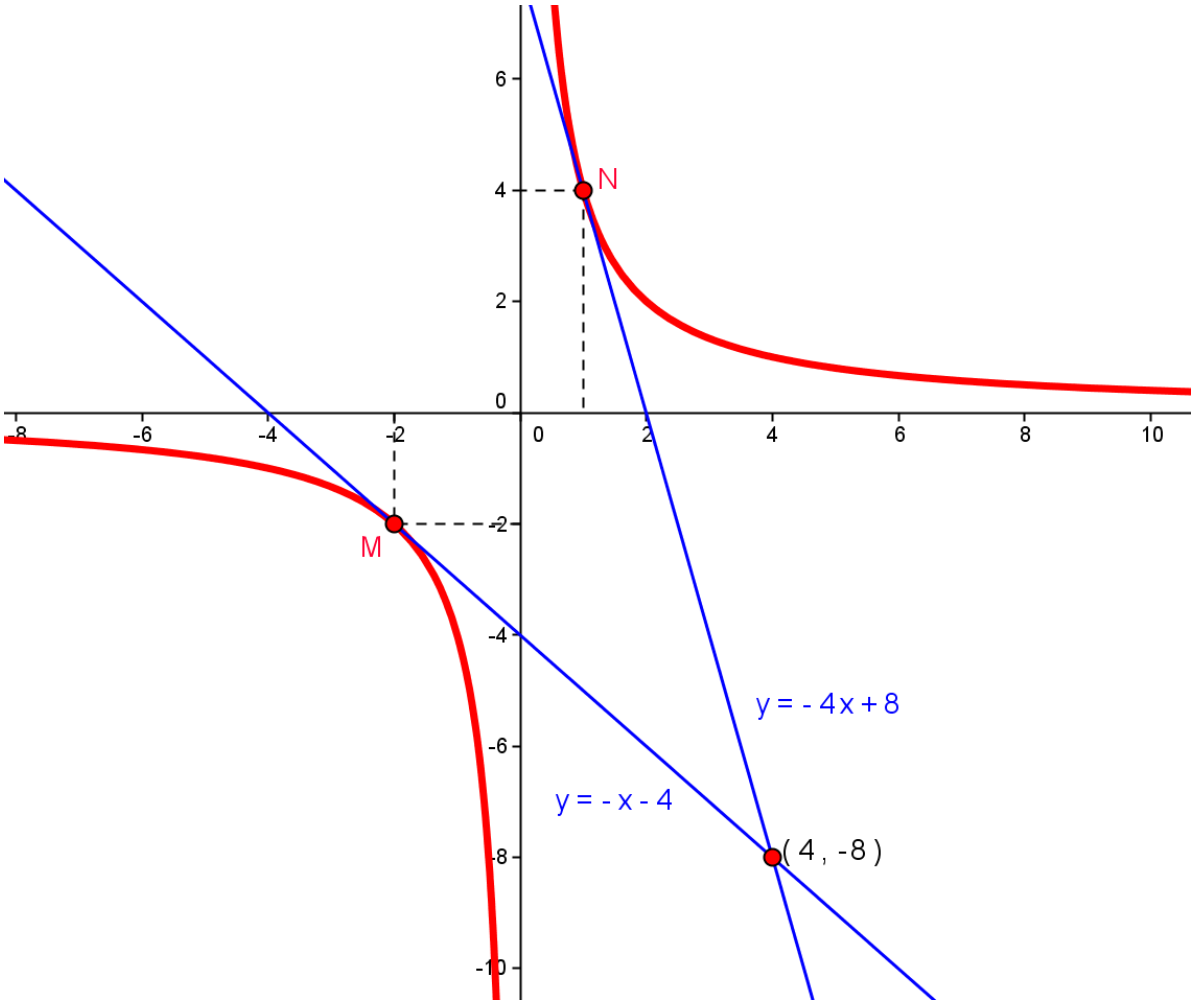
$$\left.\begin{array}{l} y_0 = \dfrac{4}{x_0} \\ y_0 = \dfrac{16 - 4x_0 - 8x_0^2}{x_0^2} \end{array}\right\} \qquad 4 = \frac{16 - 4x_0 - 8x_0^2}{x_0} \qquad x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Si $x_0 = -2 \;\rightarrow\; y_0 = \frac{4}{-2} = -2 \;\Rightarrow\; M(-2,-2)$

Si $x_0 = 1 \;\rightarrow\; y_0 = \frac{4}{1} = 4 \;\Rightarrow\; N(1,4)$

Las rectas tangentes tienen por ecuaciones:

$$y + 2 = -(x+2) \;\Rightarrow\; y = -x - 4 \qquad y - 4 = -4(x-1) \;\Rightarrow\; y = -4x + 8$$



Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 4.1

Sean las funciones $A(n) = 12 + n\sqrt[4]{n^3}$ y $B(n) = n^2 - 2n + 10$

Tenemos que comprobar que $\lim_{n\to\infty} A(n) < \lim_{n\to\infty} B(n)$ ó $\dfrac{\lim_{n\to\infty} A(n)}{\lim_{n\to\infty} B(n)} < 1$

$$\frac{\lim_{n\to\infty}\left(12+\sqrt[4]{n^7}\right)}{\lim_{n\to\infty}(n^2-2n+10)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12}{n^2}+\frac{n^{\frac{7}{4}}}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{10}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12}{n^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}{1-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0 < 1$$

Problema 4.2

a) Veamos la gráfica de la función $y = 4 - x^2$

Como el punto P se encuentra sobre el eje de abscisas sus coordenadas son $P(x,0)$. La distancia del punto P al surtidor S de coordenadas $(0,2)$ es:

$$d(P,S) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2+4}$$

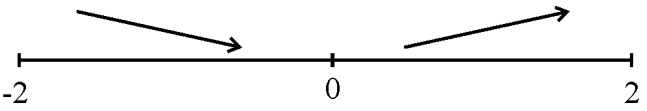
Para que esta distancia sea mínima la derivada debe de ser cero.

$$d' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Comprobamos, estudiando la monotonía, si el punto es máximo o mínimo.

$d'(-1) < 0$

$d'(1) > 0$



Por lo tanto el punto $P(0,0)$ es un mínimo, lo que significa que la distancia mínima hasta el surtidor es desde el origen de coordenadas.

b) Un punto cualquiera del arco de curva tiene de coordenadas $P(x,y) = P(x, 4-x^2)$

$$d(P,S) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} = \sqrt{x^2+4-4x^2+x^4} = \sqrt{x^4-3x^2+4}$$

$$d' = \frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}} = 0 \qquad 4x^3-6x = 0 \qquad 2x(2x^2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$$

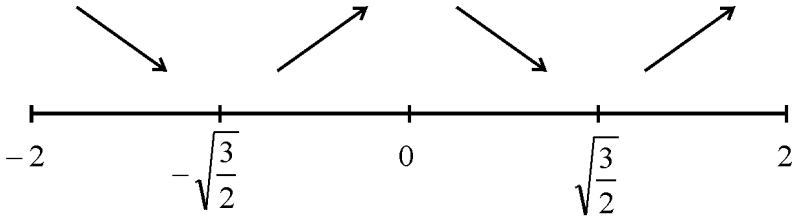
Comprobamos, estudiando la monotonía, si los puntos son máximos o mínimos.

$d'(-1'5) < 0$

$d'(-1) > 0$

$d'(1) < 0$

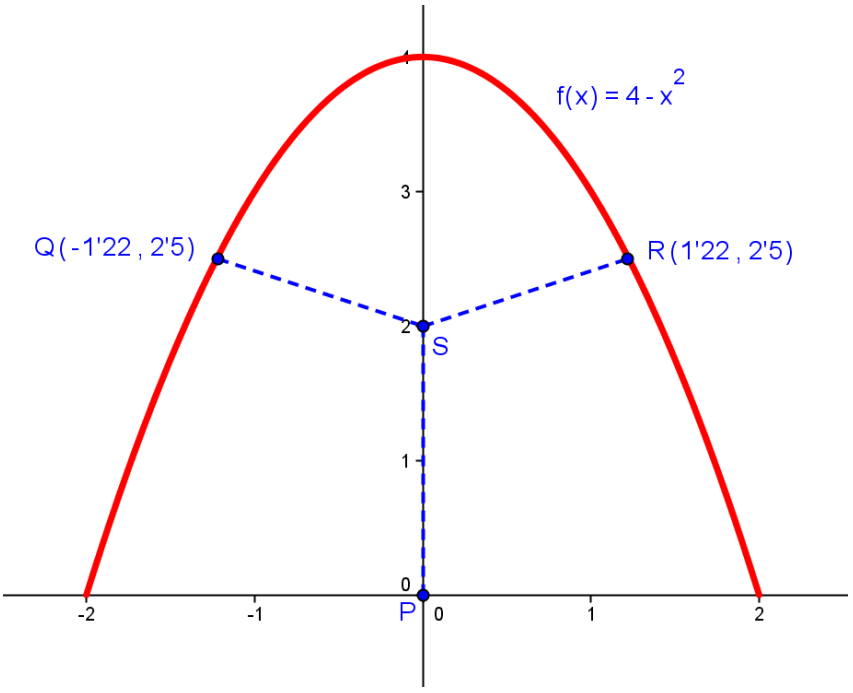
$d'(1'5) > 0$



Como se deduce de la recta de monotonía hay dos mínimos que corresponden a los puntos:

$$Q\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, d\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) = Q(-1'22, 2'5) \qquad y \qquad R\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) = R(1'22, 2'5)$$

c) Veamos cuál de los 3 puntos P, Q ó R está más próximo al surtidor.

$$d(Q,S) = d(R,S) = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} - 0\right)^2 + (2'5 - 2)^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} \approx 1'32 \qquad d(P,S) = 2$$

Lo que significa que los puntos del borde del estanque que están más próximos al surtidor son Q y R.