Septiembre 2006 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1) $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=-3 \end{cases}$

a) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$ el sistema solo admite la solución $(0,0,0)$

b) Si $\lambda=0$ resulta el sistema $\left.\begin{aligned} 2x-y+z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ 5x+5y-2z=0 \end{aligned}\right\}$

Un menor de orden 2 no nulo es por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15$, por tanto el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2. El sistema es por tanto compatible indeterminado. La tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. Las soluciones son:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 2x-y=-\lambda \\ 3x+6y=3\lambda \end{aligned}\right\} \to \left(-\frac{\lambda}{5},\frac{3\lambda}{5},\lambda\right)$$

Si $\lambda=-3$ resulta el sistema $\left.\begin{aligned} -x-y+z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ 5x+5y-5z=0 \end{aligned}\right\}$

La 2ª y 3ª ecuación son múltiplos de la 1ª, por tanto el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 1. El sistema es por tanto compatible indeterminado. Las soluciones son:

$$-x-y+z=0 \;\to\; \begin{cases} z=\lambda \\ y=\mu \end{cases} \quad\Rightarrow\quad (-\lambda+\mu,\mu,\lambda)$$

c) Si $\lambda=-3$ los tres planos coinciden.

2)

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-z=9 \\ 4x-y+z=42 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 2x-2y=9+\lambda \\ 4x-y=42-\lambda \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x=\dfrac{25}{2}-\dfrac{\lambda}{2} \\ y=8-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{25}{2}-\lambda \\ y=8-2\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

Un punto de la recta r es $A\left(\frac{25}{2},8,0\right)$ y un vector de dirección es $\vec{u}=(-1,-2,2)$

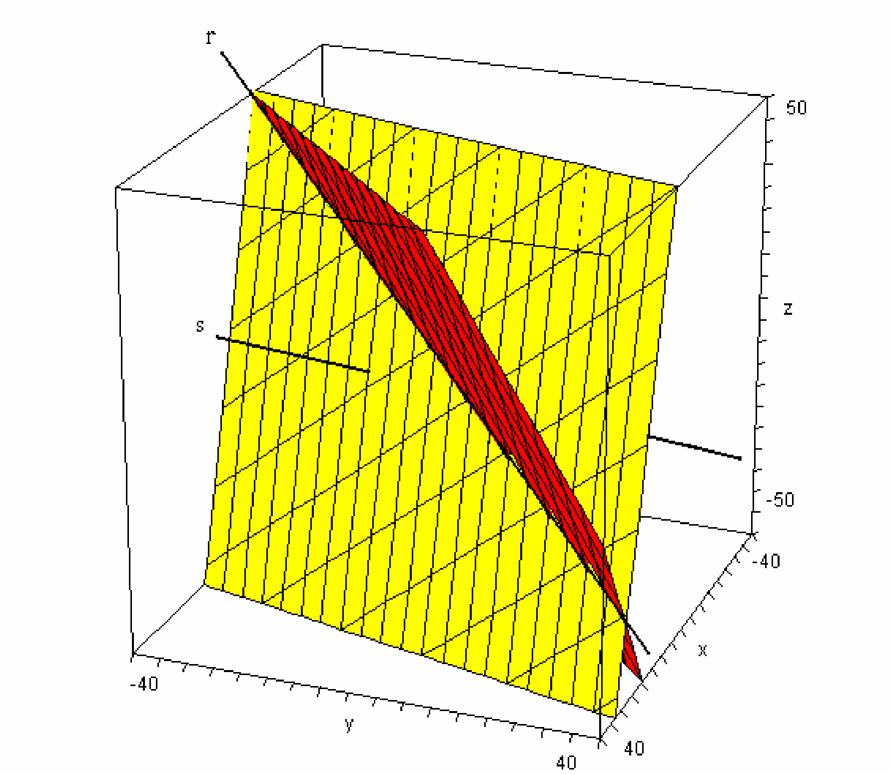
Las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

Un punto de la recta s es $B(1,3,-4)$ y un vector de dirección es $\vec{v}=(2,-8,2)=(1,-4,1)$

$$\begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 3-4\mu \\ z = -4+\mu \end{cases}$$

b) Calculamos el valor del determinante formado por las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{23}{2}, -5, -4\right)$

$$\begin{vmatrix} -\frac{23}{2} & -5 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -108 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Las rectas r y s se cruzan}$$



c) La recta t perpendicular común a r y s tiene como vector de dirección $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (2,1,2)$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{23}{2} & y-8 & z \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2y - z = 9$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene a la recta s y al vector $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - z = 5$$

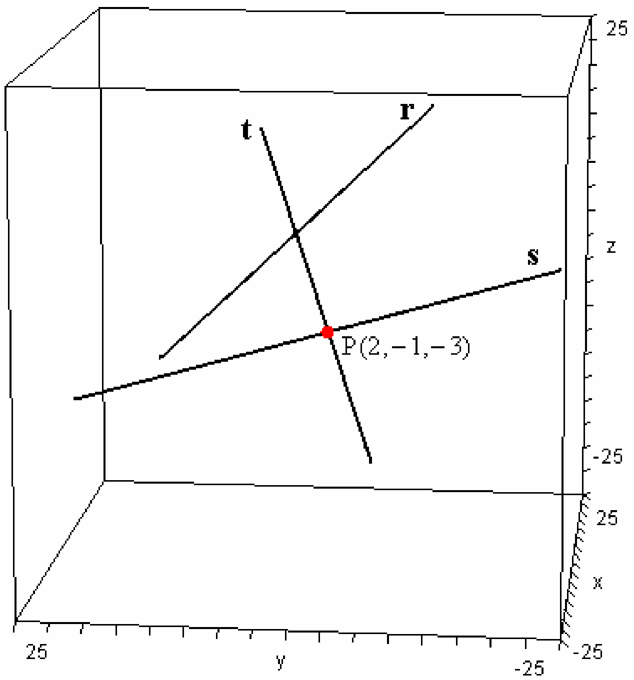
La recta t es la formada por el corte de los dos planos.

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-z=9 \\ x-z=5 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5+2t \\ y = \dfrac{1}{2}+t \\ z = 2t \end{cases}$$

El punto P es el punto de corte de las rectas s y t.

$$\begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 3-4\mu \\ z = -4+\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5+2t \\ y = \dfrac{1}{2}+t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\mu = 5+2t \\ 3-4\mu = \frac{1}{2}+t \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad P(2,-1,-3)$$



3)

a) $f(x)=x^3-3x+8$ $\qquad f'(x)=3x^2-3=0$ $\qquad x=-1$ ya que $-1\in[-3,0]$

$$f''(x)=6x \qquad f''(-1)=-6<0$$

En $x=-1$ hay un máximo relativo.

Calculamos el valor que toma la función en dicho punto y en los extremos del intervalo.

$$f(-3)=-10 \qquad f(-1)=10 \qquad f(0)=8$$

Comparando los valores se observa que en $x=-1$ hay un máximo absoluto de valor 10.

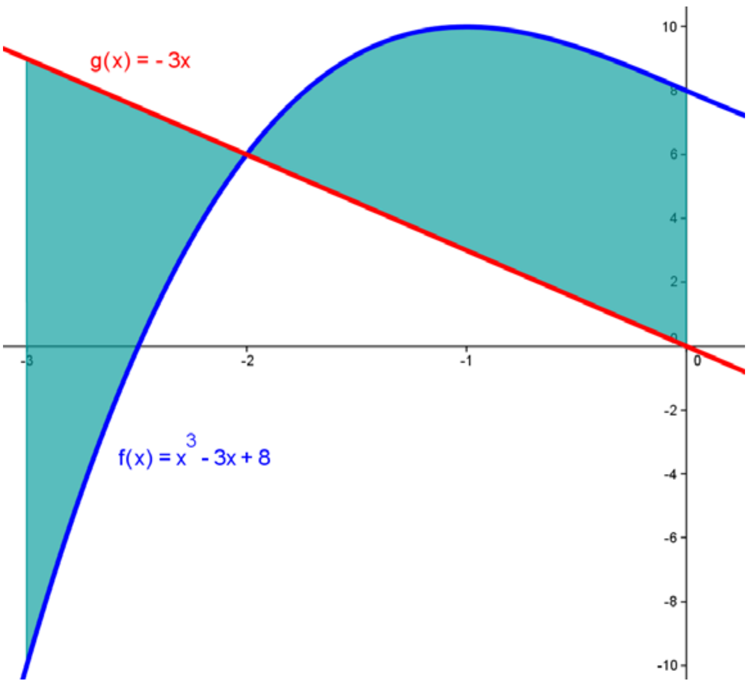
b) Para calcular el punto de corte resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+8 \\ g(x)=-3x \end{array}\right\}$

$$x^3-3x+8=-3x \qquad x^3+8=0 \;\Rightarrow\; x=-2$$

El punto de corte es $(-2,6)$.

c) $A=\left|\int_{-3}^{-2}(x^3+8)\,dx\right|+\left|\int_{-2}^{0}(x^3+8)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-3}^{-2}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{0}\right|=\left|-\frac{33}{4}\right|+|12|=$

$$\frac{33}{4}+12=20'25\ u^2$$



4)

a) El fuego se extiende de forma uniforme, es decir, a velocidad constante.

$$e = vt \;\rightarrow\; r = 1'8t \qquad A = \pi r^2 = \pi(1'8t)^2 = 3'24\pi t^2$$

b) $v = \dfrac{dA}{dt} = 6'48\pi t$

Cuando $r = 45\,m \;\rightarrow\; t = \dfrac{45}{1'8} = 25\min \;\Rightarrow\; v(25) = 6'48\pi \cdot 25 = 508'43\,\dfrac{m^2}{\min}$

Septiembre 2006 opción B. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1)

a) $\left|A^3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$

$$\left(\text{Adj}A^3\right) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{Adj}A^3\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $XA^3 = BA^2 \qquad XA^3\left(A^3\right)^{-1} = BA^2\left(A^3\right)^{-1} \qquad X = BA^2\left(A^3\right)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A^3 = A^2A \qquad A^3A^{-1} = A^2AA^{-1} \qquad A^3A^{-1} = A^2 \qquad \left(A^3\right)^{-1}A^3A^{-1} = \left(A^3\right)^{-1}A^2$

$$A^{-1} = \left(A^3\right)^{-1}A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

a) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ 2x-7y+2z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=15-\lambda \\ 2x-7y=3-2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12-t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right.$$

Para calcular la ecuación implícita del plano π consideramos los puntos $A(11,1,2)$, $B(5,7,5)$ y $C(7,-1,-2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-6,6,3) = (-2,2,1) \qquad \overrightarrow{AC} = (-4,-2,-4) = (2,1,2)$$

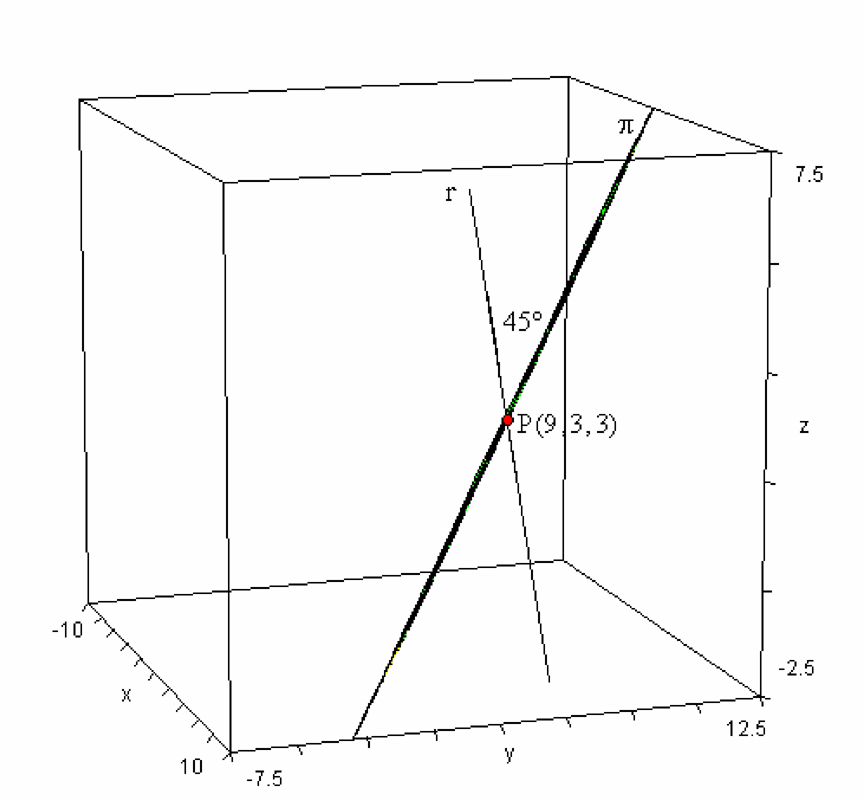
$$\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x+2y-2z-9=0$$

b) Para calcular el punto donde se cortan la recta y el plano, sustituimos las ecuaciones de la recta en la ecuación del plano.

$$12-t+2\cdot 3-2\cdot t-9=0 \;\rightarrow\; t=3 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=12-3=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \;\Rightarrow\; P(9,3,3)$$

Un vector de dirección de r es $\vec{u}=(-1,0,1)$ y un vector característico del plano es $\vec{n}=(1,2,-2)$. El ángulo que forman la recta y el plano viene dado por la expresión:

$$\alpha=\text{arcsen}\frac{|(-1,0,1)(1,2,-2)|}{\sqrt{2}\sqrt{1+4+4}}=\text{arcsen}\frac{|-3|}{3\sqrt{2}}=\text{arcsen}\frac{3}{3\sqrt{2}}=\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha=45^{\text{o}}$$

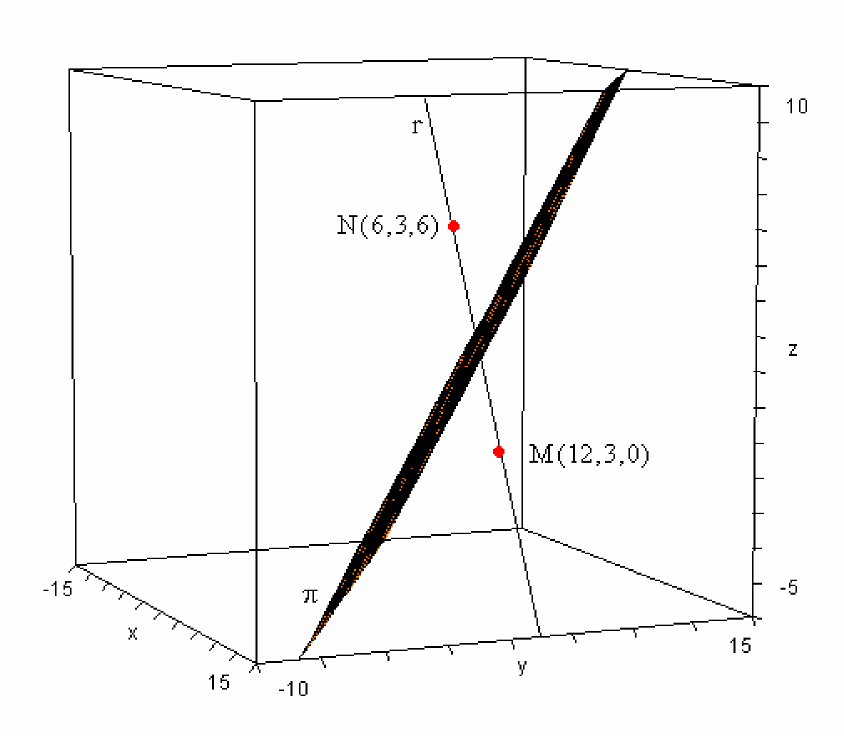


c) La distancia del punto de la recta r al plano π cuya distancia es igual a 3 es:

$$d(P,\pi)=3=\frac{|1\cdot(12-t)+2\cdot 3-2t-9|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|9-3t|}{3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 9-3t=9 \;\rightarrow\; t=0 \\ -9+3t=9 \;\rightarrow\; t=6 \end{cases}$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de la recta obtenemos los puntos:

$$M(12,3,0) \quad \text{y} \quad N(6,3,6)$$



3)

a) $f'(x) = a + \cos x$

$$O(0,0) \quad \rightarrow \quad 0 = 0 + b + \text{sen}0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Si la recta tangente en el origen coincide con el eje de abscisas ($y = 0$) la pendiente es cero, por tanto:

$$f'(0) = 0 \qquad a + \cos 0 = 0 \qquad a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

b) Estudiamos la monotonía de la función $g(x)$

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x = 0 \qquad \cos x = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad x = 0'88 \in [0, \pi]$$

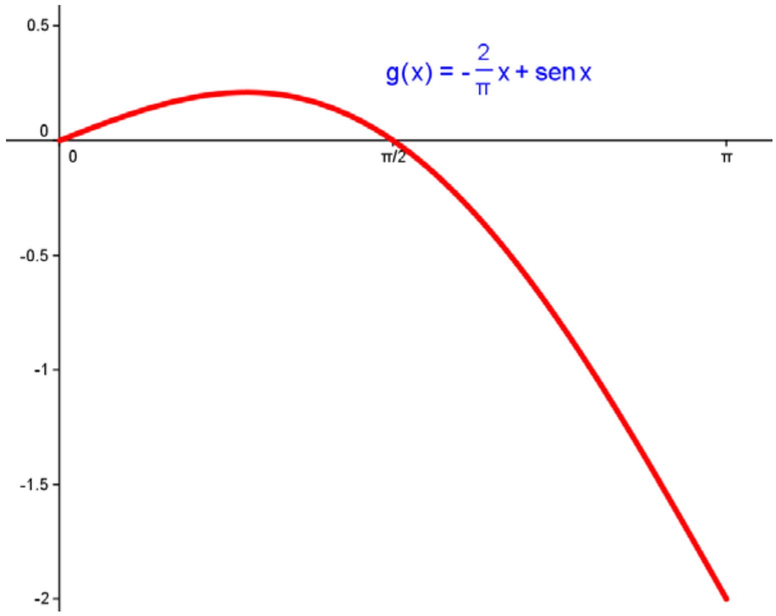
$$g''(x) = -\text{sen} x \qquad g''(0'88) = -0'77 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } x = 0'88 \text{ hay un máximo relativo}$$

Calculamos el valor que toma la función en dicho punto y en los extremos del intervalo.

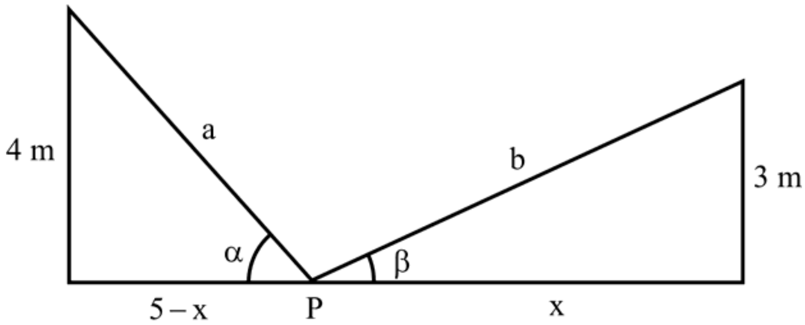
$$g(0) = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 + \text{sen}0 = 0 \qquad g(\pi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi + \text{sen}\pi = -2 + 0 = -2 \qquad g(0'88) = 0'21$$

Como en $x = 0'88$ el valor que toma la función es positivo y en $x = \pi$ el valor que toma la función es negativo, quiere decir que en ese intervalo la función decrece y corta al eje de abscisas en un punto. Como por otra parte la función se anula en $x = 0$ queda demostrado que la función se anula en 2 puntos del intervalo $[0, \pi]$.

c) $g(x) = 0 \qquad -\frac{2}{\pi} x + \text{sen} x = 0 \qquad \text{sen} x = \frac{2}{\pi} x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$



4)



a) Aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos obtenemos:

$$f(x) = a + b = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} + \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{41 - 10x + x^2} + \sqrt{9 + x^2}$$

b) $f'(x) = \dfrac{-10+2x}{2\sqrt{41-10x+x^2}} + \dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{-5+x}{\sqrt{41-10x+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} = 0$

$$(-5+x)\sqrt{9+x^2} + x\sqrt{41-10x+x^2} = 0 \qquad x\sqrt{41-10x+x^2} = (-5+x)\sqrt{9+x^2}$$

$$\left(x\sqrt{41-10x+x^2}\right)^2 = \left((-5+x)\sqrt{9+x^2}\right)^2 \qquad x^2(41-10x+x^2) = (-5+x)^2(9+x^2)$$

$$7x^2 + 90x - 225 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{15}{7} = 2'24 \in [0,5]$$

Comprobamos que las pendientes de los dos segmentos considerados son iguales.

$$\text{tg}\alpha = \frac{4}{5-x} = \frac{4}{5-\frac{15}{7}} = \frac{28}{20} = 1'4 \qquad \text{tg}\beta = \frac{3}{x} = \frac{3}{\frac{15}{7}} = \frac{21}{15} = 1'4$$

La longitud mínima es:

$$f\left(\frac{15}{7}\right)=\sqrt{16+\left(5-\frac{15}{7}\right)^2}+\sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2}=\sqrt{16+\left(\frac{20}{7}\right)^2}+\sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2}=8'6\,\mathrm{m}$$