Septiembre 2005 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1) $$AB^t + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(A^t D)E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$(AB^t + C)X = (A^t D)E \quad \rightarrow \quad (AB^t + C)^{-1}(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}(A^t D)E$$

$$IX = (AB^t + C)^{-1}(A^t D)E \quad \Rightarrow \quad X = (AB^t + C)^{-1}(A^t D)E$$

$$\left|AB^t + C\right| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 7 \qquad \mathrm{Adj}(AB^t + C) = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -21 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{Adj}(AB^t + C)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad (AB^t + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

2)

a) Las ecuaciones paramétricas de las rectas l, m y n son:

$$l: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \qquad n: \begin{cases} x = \gamma \\ y = -2\gamma \\ z = 0 \end{cases}$$

cuyos vectores de dirección son respectivamente:

$$\vec{u} = (0,0,-1) \qquad \vec{v} = (2,1,0) \qquad \vec{w} = (1,-2,0)$$

De las ecuaciones de las tres rectas se deduce que la recta l coincide con el eje z y las rectas m y n están en el plano XY ya que $z = 0$. Además las rectas m y n pasan por el origen de coordenadas (se comprueba dando a μ y a γ el valor cero), por tanto se cortan en el punto $A(0,0.0)$ que es un vértice del paralelogramo. Como además hay un vértice en el punto

$G(12,21,-11)$, significa que este vértice está en un plano paralelo al plano XY y por deducción obtenemos los vértices $C(12,21,0)$ y $E(0,0,-11)$.

Vamos a nombrar con las letras A, B, C y D a los vértices que se encuentran en el plano XY, donde $A(0,0,0)$ y $C(12,21,0)$. Supongamos que B está sobre la recta m y D sobre la recta n. Por ser un paralelepípedo rectangular se tiene que verificar que:

$$\overrightarrow{CB}\cdot\vec{v}=0 \qquad \overrightarrow{CD}\cdot\vec{w}=0$$

Las coordenadas de un punto cualquiera B de la recta m son $B(2\mu,\mu,0)$ y las de la recta n son $D(\gamma,-2\gamma,0)$ por tanto:

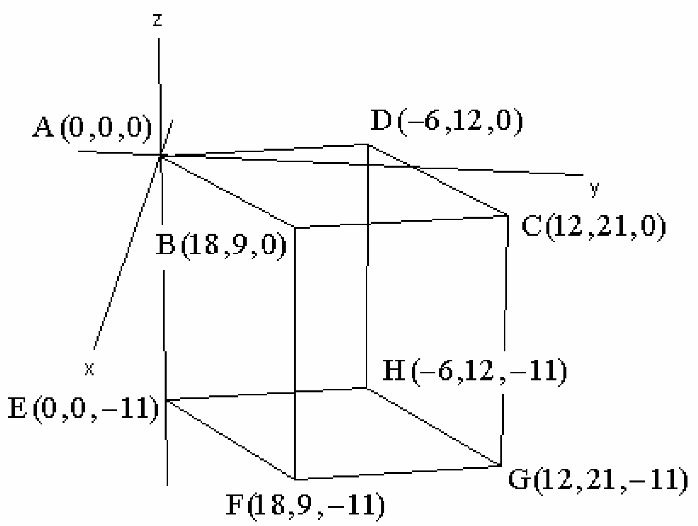
$$\overrightarrow{CB}=(2\mu-12,\mu-21,0) \qquad \overrightarrow{CD}=(\gamma-12,-2\gamma-11,0)$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\vec{v}=(2\mu-12,\mu-21,0)(2,1,0)=4\mu-24+\mu-21=0 \;\rightarrow\; \mu=9 \;\Rightarrow\; B(18,9,0)$$

$$\overrightarrow{CD}\cdot\vec{w}=(\gamma-12,-2\gamma-21,0)(1,-2,0)=\gamma-12+4\gamma+42 \;\rightarrow\; \gamma=-6 \;\Rightarrow\; D(-6,12,0)$$

Por simetría obtenemos los otros dos vértices que se encuentran en el plano paralelo al XY.

$$F(18,9,-11) \qquad H(-6,12,-11)$$



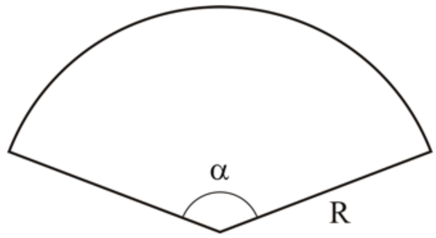
b) El volumen del paralelepípedo viene dado por la expresión: $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]\right|$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]=\begin{vmatrix}18 & 9 & 0\\ -6 & 12 & 0\\ 0 & 0 & -11\end{vmatrix}=-2376-594=-2970 \qquad V=\left|-2970\right|=2970\ u^3$$

3)

a) Nos piden hacer máxima la función

$$A=\frac{1}{2}\alpha R^2$$



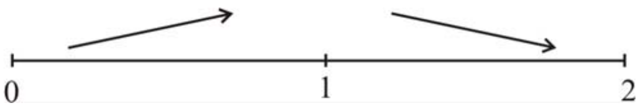
Sabemos que el perímetro es 4 luego: $\quad 4=2R+R\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\dfrac{4-2R}{R}$

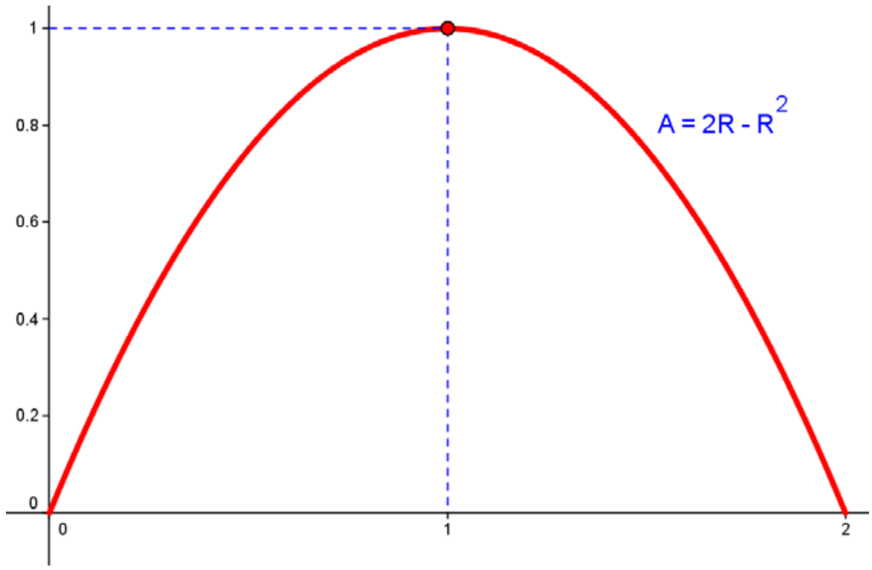
$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-2R}{R}\cdot R^2=\frac{4R^2-2R^3}{2R}=2R-R^2 \qquad A'=2-2R=0 \qquad R=1 \;\Rightarrow\; \alpha=2\,\text{rad}$$

Estudiando la monotonía deducimos que para $R=1\,\text{m}$ hay un máximo, por tanto el ángulo central debe medir 2 rad para que el área sea máxima.

$A'(0'5)=1>0$

$A'(1'5)=-1<0$





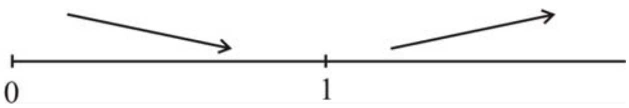
b) En este caso $\quad 1=\dfrac{1}{2}\alpha R^2 \;\Rightarrow\; \alpha=\dfrac{2}{R^2}$

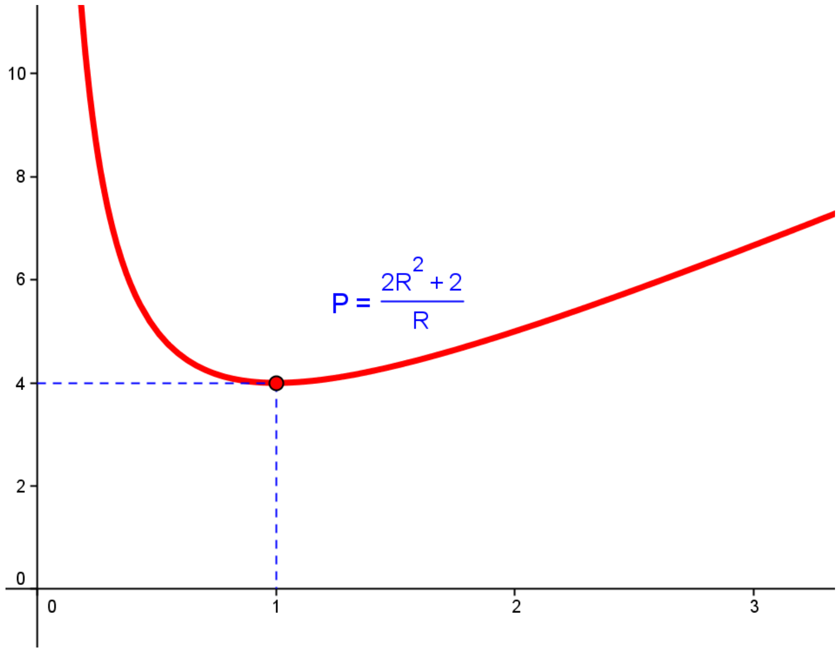
$$P=2R+R\cdot\frac{2}{R^2}=\frac{2R^2+2}{R} \qquad P'=\frac{2R^2-2}{R^2} \qquad 2R^2-2=0 \;\Rightarrow\; R=1$$

Estudiando la monotonía deducimos que el perímetro es mínimo para $R=1\,\text{m}$.

$P'(0'5)<0$

$P'(1'5)>0$





4.1) Del enunciado del problema deducimos que $V = kR^4$.

Las tuberías que suministra el fabricante tienen un radio de:

$$R - \frac{0'5}{100}R = R - 0'005R = 0'995R \quad \Rightarrow \quad V' = k(0'995R)^4$$

Calculamos la relación que hay entre los dos caudales.

$$\frac{V'}{V} = \frac{k(0'995R)^4}{kR^4} = 0'995^4 = 0'9801 = 98'01\%$$

El caudal se reducirá en un $100 - 98'01 = 1'99\%$

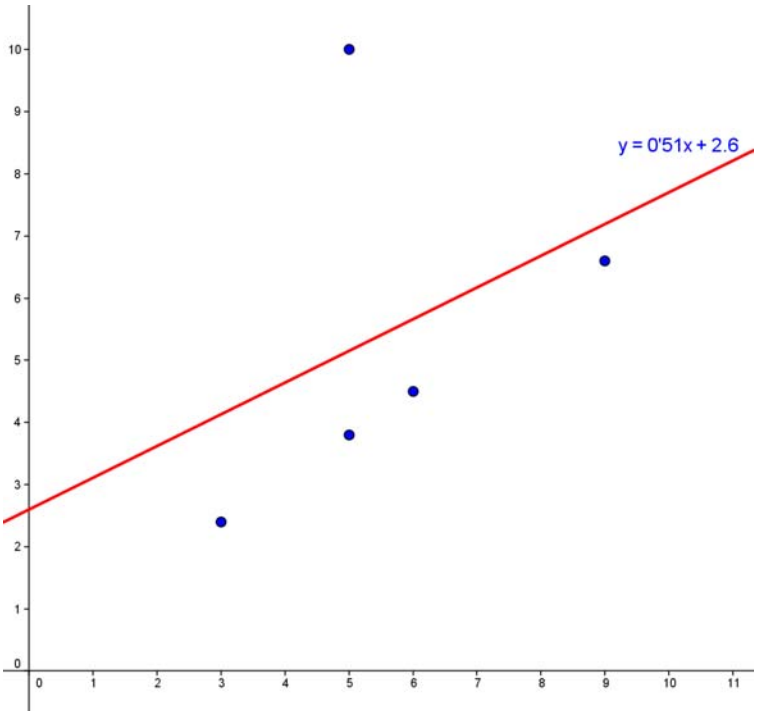
4.2)

a) Calculamos la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

$$\begin{cases} \bar{x} = 5'6 \\ \sigma_x = 1'96 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y} = 5'46 \\ \sigma_y = 2'64 \end{cases} \qquad \sigma_{xy} = 1'944 \qquad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1'944}{1'96 \cdot 2'64} = 0'4$$

El coeficiente de correlación está más próximo a $0'5$

$$y - 5'46 = \frac{1'944}{1'96^2}(x - 5'6) \quad \rightarrow \quad y = 0'51x + 2'6$$

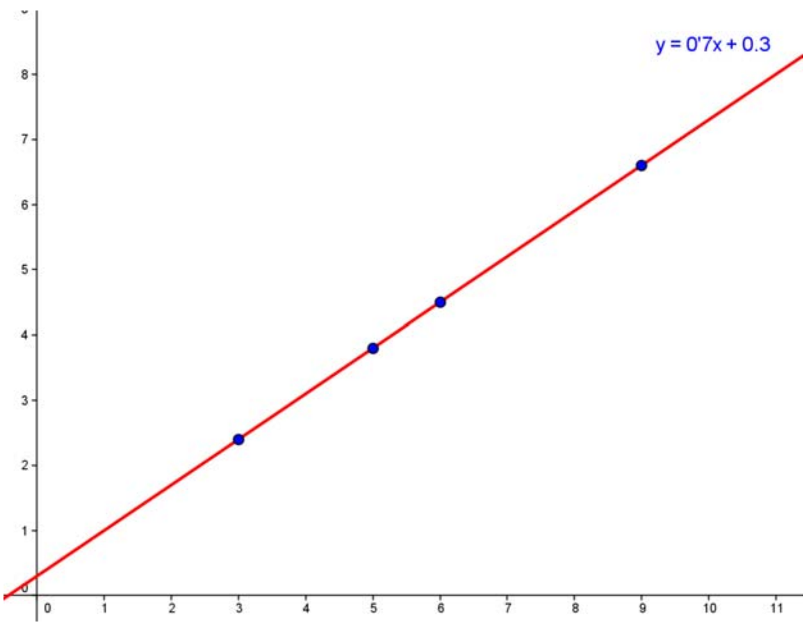


b) $\begin{cases} \overline{x} = 5'75 \\ \sigma_x = 2'17 \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{y} = 4'325 \\ \sigma_y = 1'52 \end{cases}$ $\sigma_{xy} = 3'28$ $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{3'28}{2'17 \cdot 1'52} = 0'99$

Al ser la correlación prácticamente 1 quiere decir que hay una relación funcional entre las variables que viene dada por la ecuación correspondiente a la recta de regresión.

$$y - 4'325 = \frac{3'28}{2'17^2}(x - 5'75) \quad \rightarrow \quad y = 0'7\,x + 0'3$$

La diferencia con el caso anterior radica en que el punto $(5,10)$ que ahora hemos eliminado está muy alejado de la media de la distribución, lo que hace que la correlación ahora sea casi de 1.



Septiembre 2005 opción B. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1) Si llamamos "x" a la cantidad de alimento Migato, "y" a la cantidad de alimento Catomeal y "z" a la cantidad de alimento Comecat tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r}600x+300y+200z=470\\300x+400y+600z=370\\100x+300y+200z=160\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}6x+3y+2z=4'7\\3x+4y+6z=3'7\\1x+3y+2z=1'6\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0'62\\y=0'22\\z=0'16\end{array}\right.$$

Dado que $x+y+z=0'62+0'22+0'16=1$ quiere decir que hay que mezclar 62% de "x", 22% de "y" y 16% de "z".

2)

a) El vector característico del plano perpendicular a π y a σ es el producto vectorial de los vectores característicos de éstos.

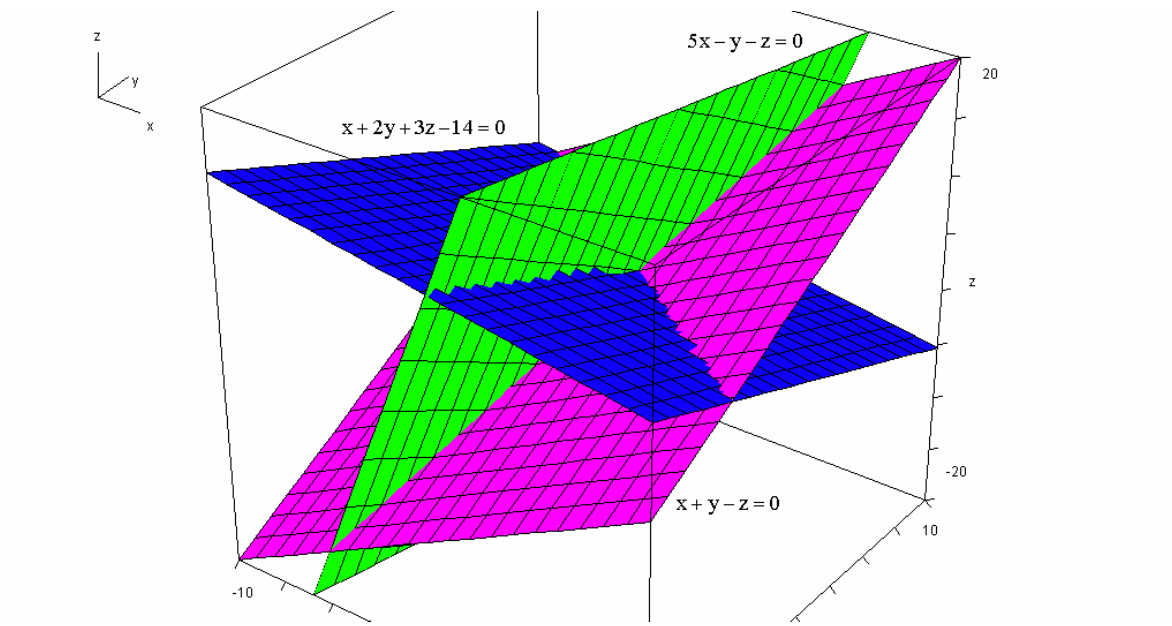
El vector característico del plano π es: $\vec{u}=(5,-1,-1)$. El vector característico del plano σ es: $\vec{v}=(1,1,-1)$

El vector característico del plano perpendicular es: $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}=(2,46)=(1,2,3)$

La ecuación del plano es: $x+2y+3z+k=0$. Como tiene que pasar por el punto $P(9,4,-1)$ se verifica que:

$$9+2\cdot 4+3(-1)+k=0 \;\Rightarrow\; k=-14$$

por tanto el plano buscado es: $x+2y+3z-14=0$



b) La recta r intersección de los planos π y σ es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x-y=\lambda \\ x+y=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\lambda \\ y=\dfrac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\lambda \\ y=\dfrac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=3\lambda \end{array}\right.$$

La recta r pasa por el punto $O(0,0,0)$ y tiene como vector de dirección $\vec{u}=(1,2,3)$.

Calculamos el plano que pasa por P y es perpendicular a r. El vector característico del plano coincide con el vector de dirección de la recta r, por tanto la ecuación del plano es:

$$x+2y+3z+D=0$$

Como pasa por el punto $P(9,4,-1)$ se verifica: $9+2\cdot 4+3\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=-14$

La ecuación del plano es $x+2y+3z-14=0$

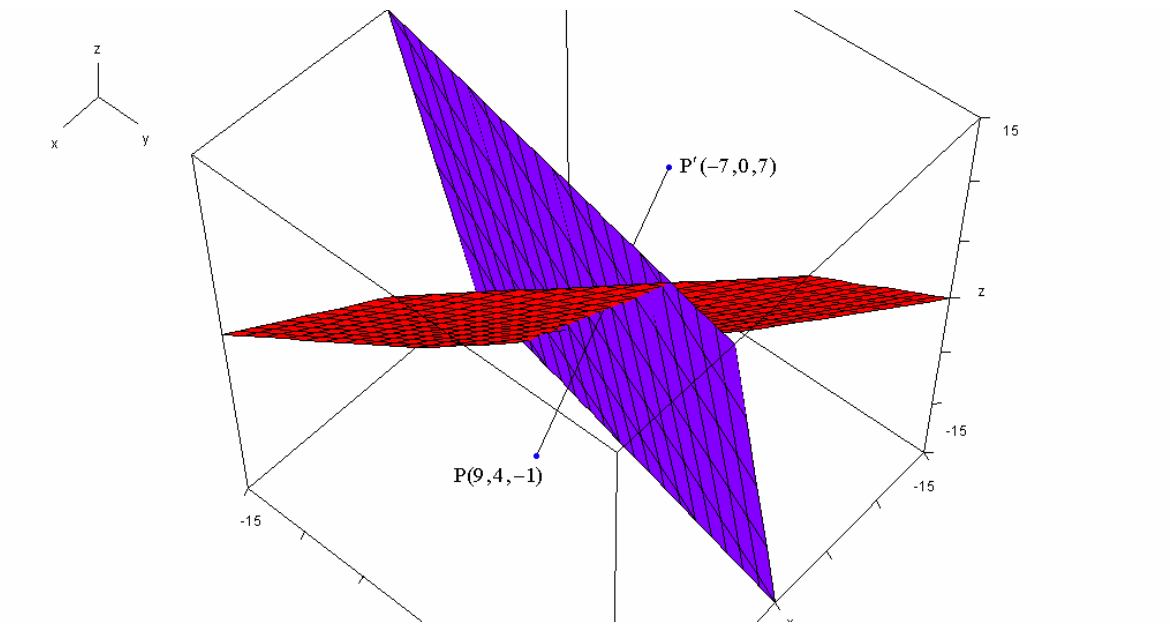
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones del plano y de la recta r para calcular el punto de corte entre recta y plano, que será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

$$\lambda+2\cdot 2\lambda+3\cdot 3\lambda-14=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

El punto de corte es: $A(1,2,3)$ y por tanto el simétrico de P respecto del punto A es:

$$\frac{9+p_1}{2}=1 \Rightarrow p_1=-7 \qquad \frac{4+p_2}{2}=2 \Rightarrow p_2=0 \qquad \frac{-1+p_3}{2}=3 \Rightarrow p_3=7$$

$$P'(-7,0,7)$$



3) Supongamos que el punto de tangencia tiene de coordenadas (a,b). Las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva son de la forma

$$y-b=y'(a)(x-a)$$

donde $\quad y'=2x+2 \;\Rightarrow\; y'(a)=2a+2$

Como las rectas tangentes pasan también por el punto $(2,3)$, se verifica:

$$3-b=(2a+2)(2-a) \;\rightarrow\; 3-b=-2a^2+2a+4 \;\rightarrow\; b=2a^2-2a-1$$

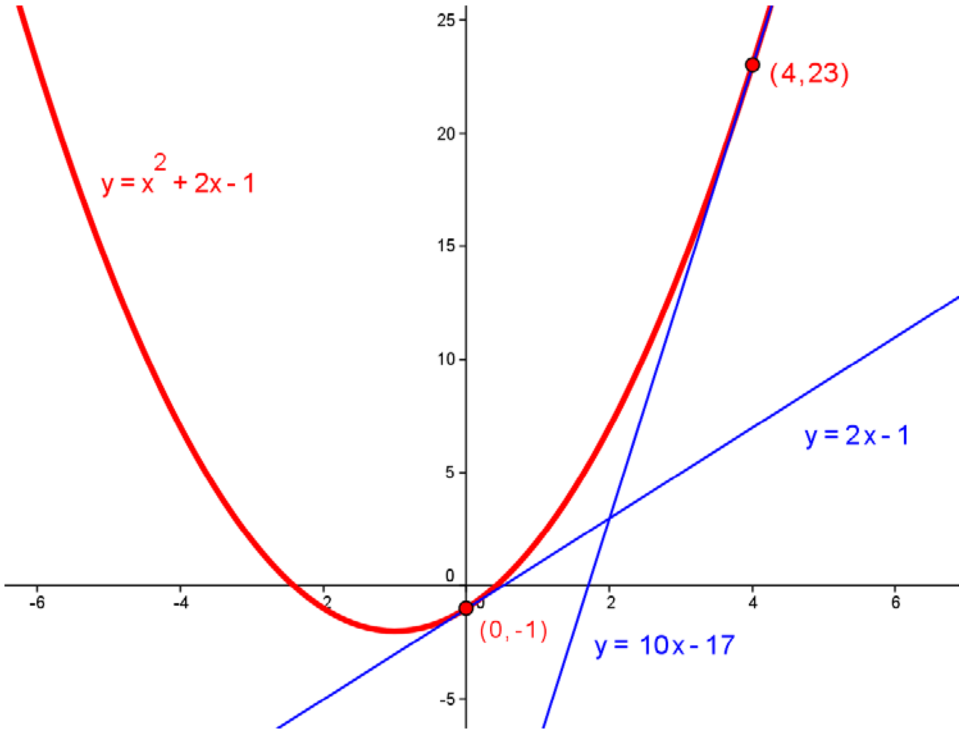
El punto (a,b) pertenece a la parábola luego $\quad b=a^2+2a-1$.

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones obtenemos los puntos de coordenadas (a,b).

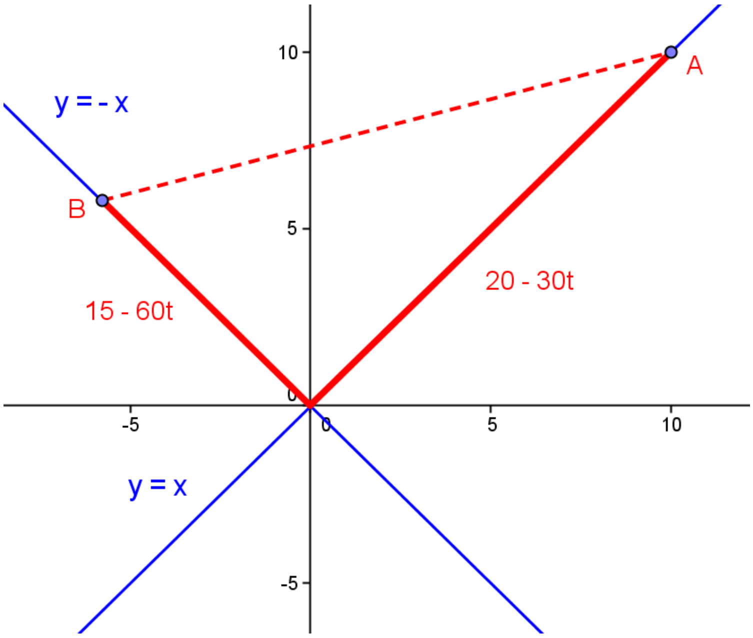
$$\left.\begin{array}{l} b=2a^2-2a-1 \\ b=a^2+2a-1 \end{array}\right\} \rightarrow\; a^2-4a=0 \qquad a(a-4)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=0 & b=-1 \\ a=4 & b=23 \end{cases}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y+1=2x \;\Rightarrow\; y=2x-1 \qquad\qquad y-23=10(x-4) \;\Rightarrow\; y=10x-17$$



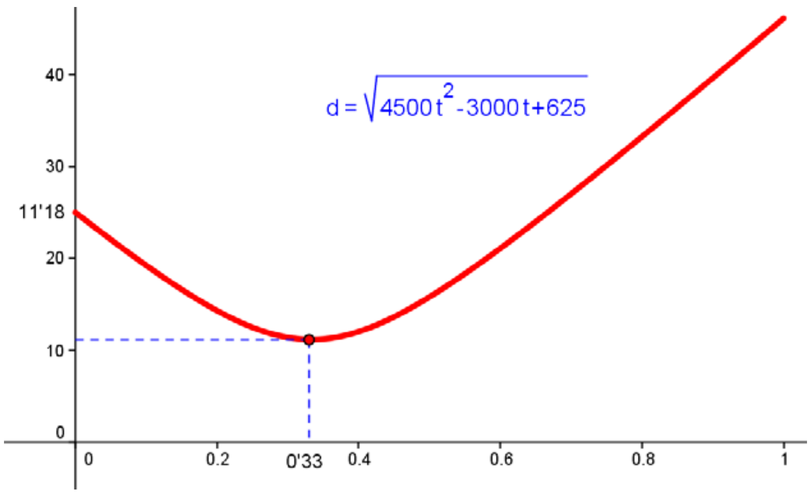
4.1) El punto P es el origen de coordenadas. El espacio recorrido por la lancha A será $20-30t$ y el recorrido por el punto B será $15-60t$.



a) La distancia entre A y B la calculamos a través del teorema de Pitágoras.

$$\overline{AB}^2 = (20-30t)^2 + (15-60t)^2 \qquad d = \sqrt{(20-30t)^2 + (15-60t)^2} = \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}$$

b) $$d' = \frac{9000t - 3000}{2\sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}} = 0 \qquad 9000t - 3000 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad d = 11'18\,\text{km}$$



4.2)

a) Es una distribución $N(65,1'5)$

$$p(63'5 \leq x \leq 68) = p\left(\frac{63'5-65}{1'5} \leq z \leq \frac{68-65}{1'5}\right) = p(-1 \leq z \leq 2)$$

$$p(-1 \leq z \leq 2) = p(z \leq 2) - p(z \leq -1) = p(z \leq 2) - p(z \geq 1) = p(z \leq 2) - [1 - p(z \leq 1)] =$$

$$p(z \leq 2) - 1 + p(z \leq 1) = 0'9772 - 1 + 0'8413 = 0'8185 = 81'85\%$$

b) $p(x \geq 68) = p\left(z \geq \frac{68-65}{1'5}\right) = p(z \geq 2) = 1 - p(z \leq 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

Es una distribución binomial $B(n,p) = B(3, 0'0228)$.

$$(X = 2) = \binom{3}{2} 0'0228^2\, 0'9772 = 0'0015 = 0'15\%$$