Septiembre 2004 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

Efectuando los productos tenemos: $\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\ 3x+4z & 3y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z+3t & 2z+4t\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}x+2z&=x+3y\\ y+2t&=2x+4y\\ 3x+4z&=z+3t\\ 3y+4t&=2z+4t\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+2z-x-3y&=0\\ y+2t-2x-4y&=0\\ 3x+4z-z-3t&=0\\ 3y+4t-2z-4t&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}2z-3y&=0\\ -3y+2t-2x&=0\\ x+z-t&=0\\ 3y-2z&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x+z-t&=0\\ 2x+3y-2t&=0\\ 3y-2z&=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Gauss}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El sistema equivalente es: $\left.\begin{aligned}x+z-t&=0\\ 3y-2z&=0\end{aligned}\right\}$ que es un sistema Compatible e Indeterminado. Despejando dos de las incógnitas en función de las otras dos obtenemos:

$$y=\frac{2z}{3}\qquad x=t-z\qquad\Rightarrow\qquad X=\begin{pmatrix}t-z & \frac{2z}{3}\\ z & t\end{pmatrix}$$

2)

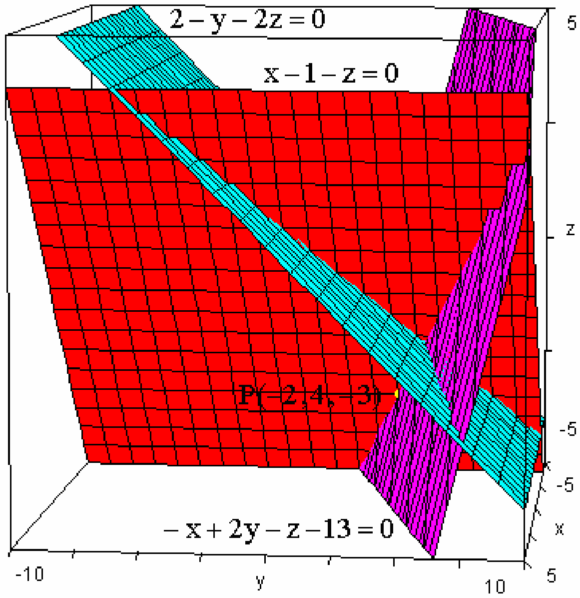
a) Por ser perpendiculares el plano y la recta, el vector de dirección de la recta coincide con el vector normal del plano.

El vector de dirección de la recta es: $\vec{u}=\vec{n}=(1,-2,1)$

La ecuación del plano es: $Ax+By+Cz+D=0\quad\rightarrow\quad x-2y+z+D=0$

Como el plano pasa por el punto $P(-2,4,-3)$

$$-2-2\cdot4-3+D=0\quad\rightarrow\quad D=13\quad\Rightarrow\quad x-2y+z+13=0$$



b) Sea $A(1,2,0)$ un punto de la recta. La fórmula que da la distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} \quad \text{donde} \quad \overrightarrow{AP}=(-2,4,-3)-(1,2,0)=(-3,2,-3)$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{matrix}\right\|}{\left|\sqrt{1+4+1}\right|}=\frac{\left|-4\,\vec{i}+4\,\vec{k}\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{32}{6}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

3)

a) Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x=-\frac{3}{4}$ se tiene que verificar que $f'\left(-\frac{3}{4}\right)=0$.

$$f'(x)=2x+m \qquad f'\left(-\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+m=0 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{3}{2}$$

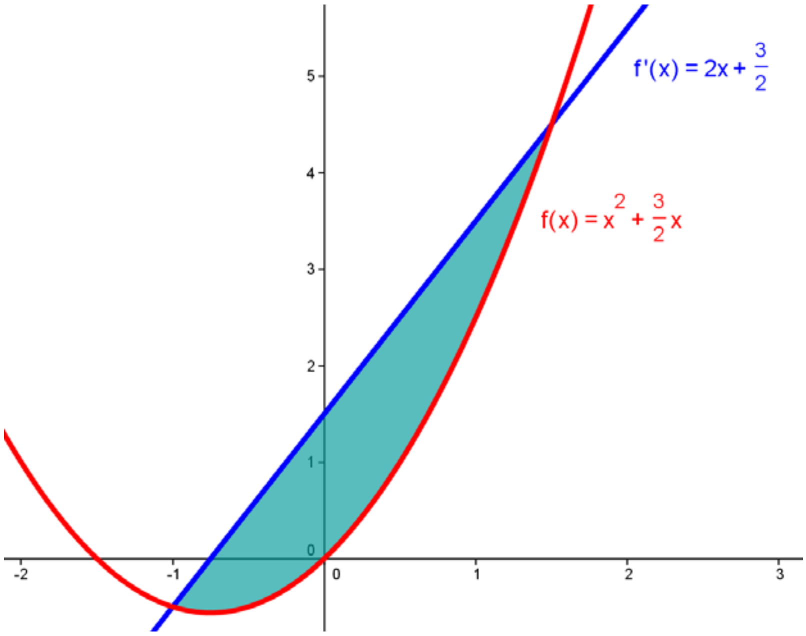
b) Se trata de calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y=f(x)=x^2+\frac{3}{2}x$ e $y=f'(x)=2x+\frac{3}{2}$. Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$x^2+\frac{3}{2}x=2x+\frac{3}{2} \qquad x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \qquad x=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}}{2} \qquad \begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ x=-1\end{cases}$$

El área viene dada por la expresión:

$$A=\left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left[x^2+\frac{3}{2}x-\left(2x+\frac{3}{2}\right)\right]dx\right|=\left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left[x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right]dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$A=\left|\frac{27}{24}-\frac{9}{16}-\frac{9}{4}-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\right|=\left|\frac{27}{24}-\frac{9}{16}-\frac{9}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right|=\left|-\frac{125}{48}\right|=\frac{125}{48}\,u^2$$



4.1)

a) El número de bacterias en función del tiempo viene dado por la expresión:

$$P(t)=10\cdot 2^t \quad \Rightarrow \quad P(10)=10\cdot 2^{10}=10240 \text{ bacterias}$$

b) $P'(t)=a \quad \rightarrow \quad P(t)=\int a\,dt=at+k \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P(0)=500=k \\ P(3)=3a+k=1100 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=200$

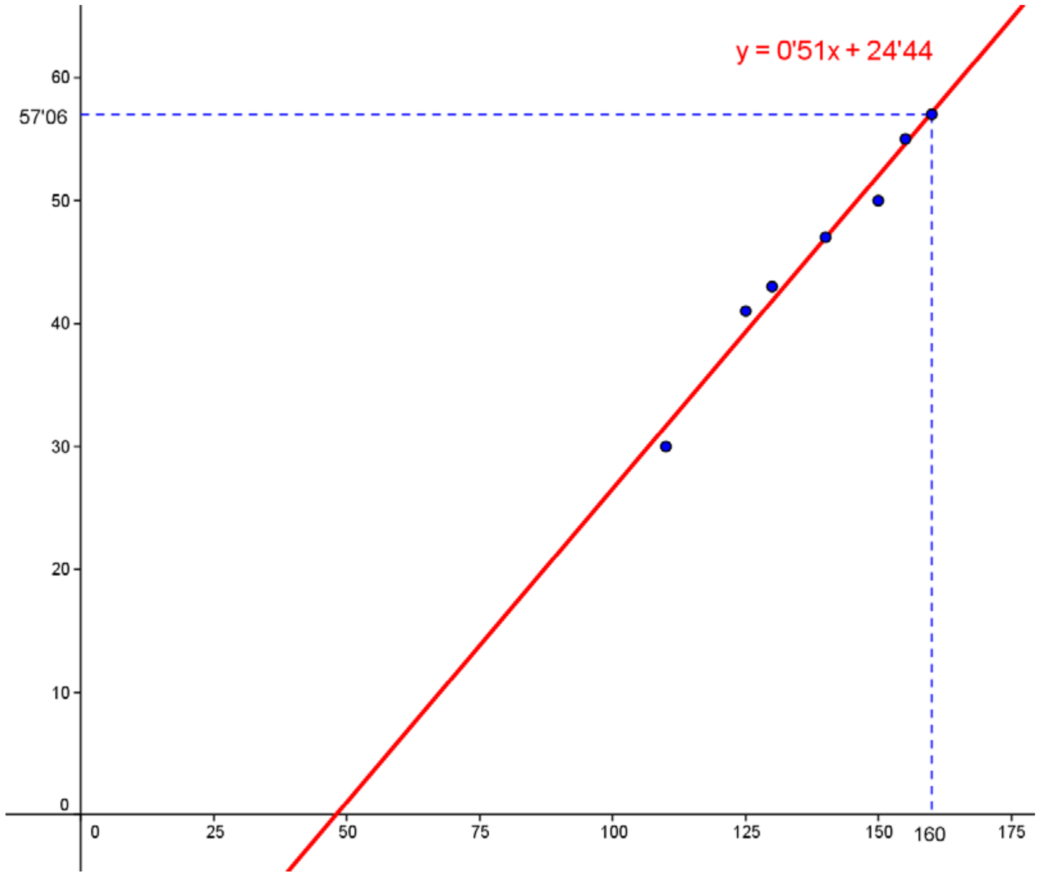
La expresión es de la forma $P(t)=200t+500$ por tanto $P(10)=2500$ bacterias

4.2)

a) Los parámetros estadísticos de la distribución son:

$$\begin{cases} \bar{x}=135 \\ \sigma_x=15'27 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y}=44'33 \\ \sigma_y=7'86 \end{cases} \qquad \sigma_{xy}=\frac{36620}{6}-135\cdot 44'33=118'78 \qquad r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=0'98$$

$$y-44'33=\frac{118'78}{15'27^2}(x-135) \quad \rightarrow \quad y=0'51x-24'44 \quad \rightarrow \quad y(160)=57'06$$



b) Los cálculos están en el apartado anterior.

c) Dado que el coeficiente de correlación lineal es muy elevado y próximo a 1 la predicción será muy buena siempre que la producción se encuentre dentro del intervalo de los datos del problema. Como una producción de 400 millones se aleja bastante de dicho intervalo no podemos predecir con seguridad las compras.

Septiembre 2004 opción B. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1)

a) La matriz inversa de A existe siempre que el determinante de A sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0 \qquad (\mathrm{Adj}A)=\begin{pmatrix}6 & 6 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}A)^t=\begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\ 6 & -2 & 12\\ 2 & -2 & 8\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\ 6 & -2 & 12\\ 2 & -2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1\end{pmatrix}$$

b) $B=A(A+4I)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-4I$$

c) Las forma más sencilla de resolver este apartado es basarnos en las igualdades de los apartados anteriores.

$$A(A+4I)=-4I \qquad \frac{A(A+4I)}{-4}=I \qquad A\cdot\frac{A+4I}{-4}=I \qquad A\cdot A^{-1}=I \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}=-\frac{1}{4}A-I$$

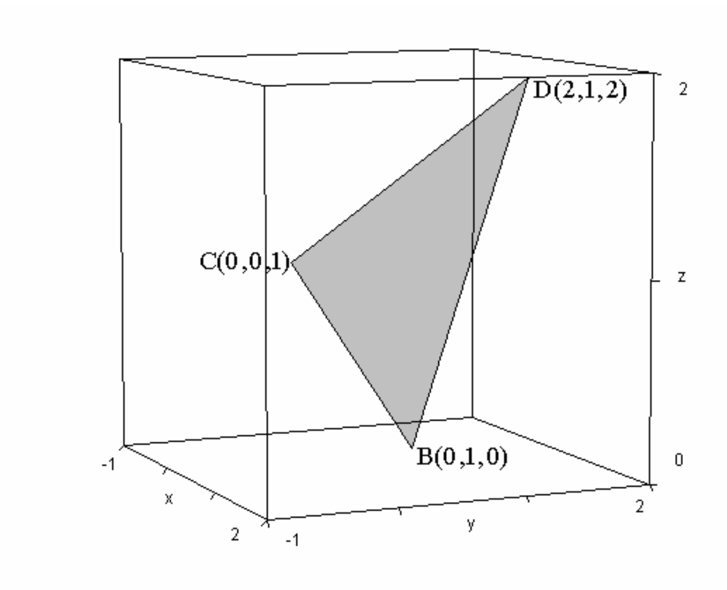
Como $\begin{cases}A^{-1}=xA+yI\\ A^{-1}=-\frac{1}{4}A-I\end{cases} \quad \rightarrow \quad xA+yI=-\frac{1}{4}A-I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ y=-1\end{cases}$

Por otro lado tenemos que $A(A+4I)=A^2+4AI=A^2+4A=-4I$

Como $\begin{cases}A^2=-4A-4I\\ A^2=zA+tI\end{cases} \quad \rightarrow \quad zA+tI=-4A-4I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}z=-4\\ t=-4\end{cases}$

2)

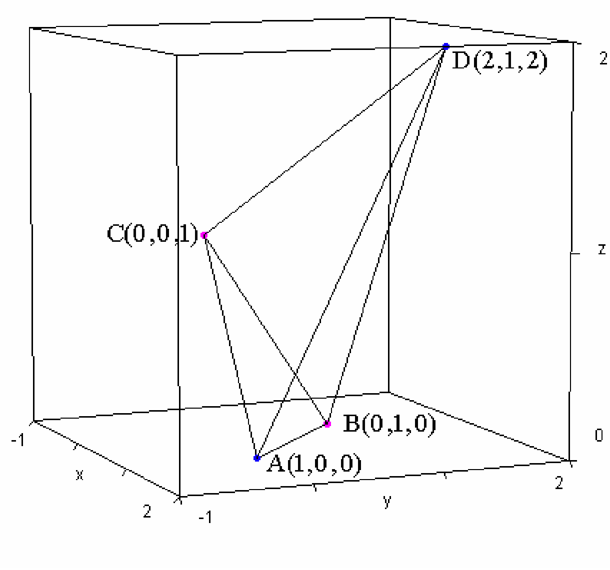
a) $\overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1)$ y $\overrightarrow{BD}=(2,1,2)-(0,1,0)=(2,0,2)$



$$A=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-2\,\vec{i}+2\,\vec{j}+2\,\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$$

b) $\overrightarrow{BA}=(1,0,0)-(0,1,0)=(1,-1,0)$

$$V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\,\overrightarrow{BC},\,\overrightarrow{BD}\right]\right|}{6}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\right\|}{6}=\frac{|-4|}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$



c) La ecuación del plano que pasa por B, C y D es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x+2y+2z-2=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-z+1=0$$

La distancia del punto A al plano es:

$$d = \frac{|1\cdot 1+0\cdot(-1)+0\cdot(-1)+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3)

a) $4x+11 = A\cdot 2(x+1)+B = 2Ax+2A+B \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4=2A \\ 11=2A+B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=7 \end{cases}$

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1}\,dx = 2\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx = 2\ln\left|(x+1)^2+1\right| + 7\,\mathrm{arctg}(x+1)+k$$

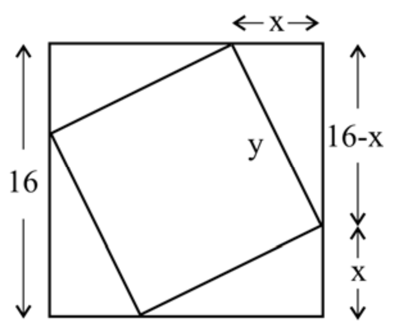
b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx = \left[2\ln\left|(x+1)^2+1\right| + 7\,\mathrm{arctg}(x+1)\right]_0^{\sqrt{3}-1} =$

$$2\ln\left|(\sqrt{3}-1+1)^2+1\right| + 7\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3}-1+1) - \left[2\ln\left|(0+1)^2+1\right| + 7\,\mathrm{arctg}(0+1)\right] =$$

$$2\ln 4 + 7\,\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \left[2\ln 2 + 7\,\mathrm{arctg}1\right] = 2\ln 4 + 7\cdot\frac{\pi}{3} - 2\ln 2 - 7\cdot\frac{\pi}{4} = 2\ln 2 + \frac{7\pi}{12} = 3'2188$$

4.1)

El área del cuadrado es $A = y^2$



Por el Tª de Pitágoras

$$y^2 = x^2 + (16-x)^2 = 2x^2 - 32x + 256$$

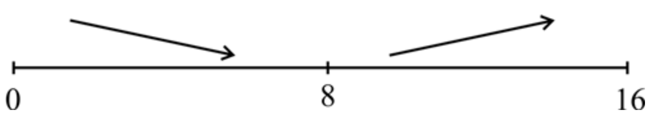
$A = 2x^2 - 32x + 256 \qquad A'(x) = 4x - 32$

$A'(x) = 0 \qquad 4x - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{128}$

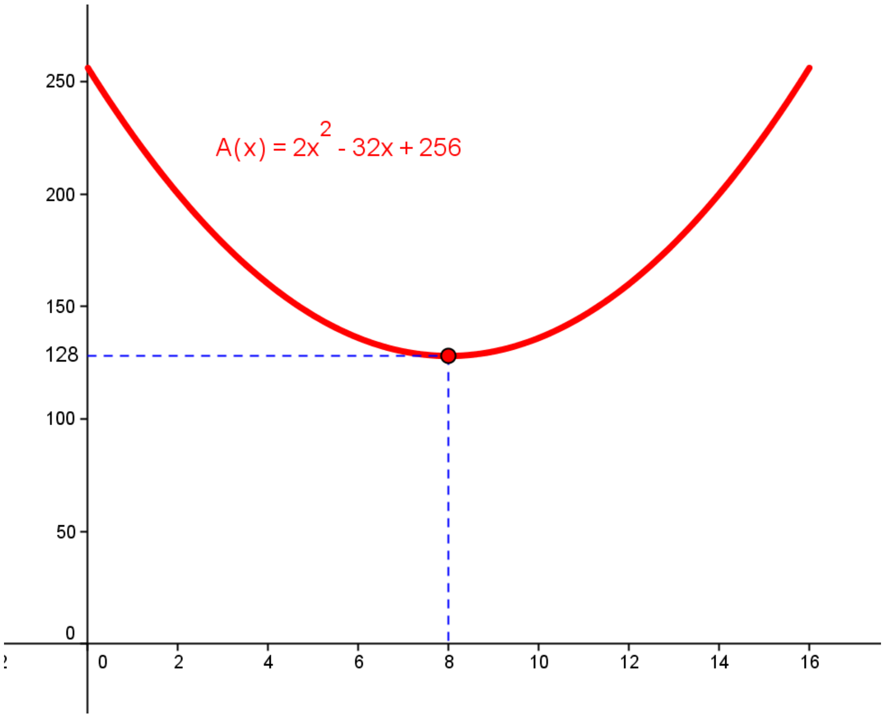
Cuando $x = 8$ cm el área del cuadrado es mínima y su valor es de $A(8) = 128\ \text{cm}^2$.

$A'(1) = -28 < 0$

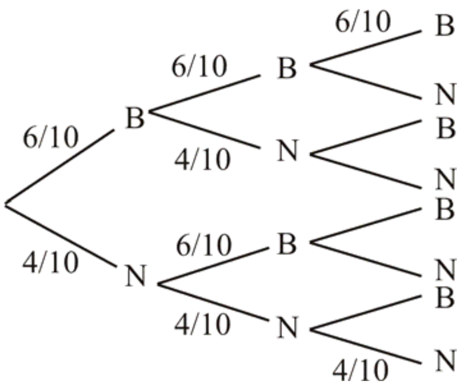
$A'(9) = 4 > 0$



La gráfica que nos da el área en función de x es:



4.2)



a) $p(+1N) = p(BNN) + p(NBN) + p(NNB) + p(NNN) =$

$$\frac{6}{10}\frac{4}{10}\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\frac{6}{10}\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\frac{4}{10}\frac{6}{10} + \frac{4}{10}\frac{4}{10}\frac{4}{10} = 0'352$$

b) La probabilidad obtenida se fundamenta en que los sucesos son independientes ya que las bolas se devuelven a la urna y no influye una extracción en la siguiente, por tanto la probabilidad será la suma de los productos de las probabilidades de cada una de las ramas del diagrama en árbol.