

Septiembre 2003 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1)

a) Calculamos los valores para los cuales se anula el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

La matriz A es invertible para $m \neq 1$ y $m \neq 3$.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix} \quad [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(m-1)(m-3)} \begin{vmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{vmatrix}$$

$$b) \quad AX = B - AB \quad A^{-1}AX = A^{-1}(B - AB) \quad IX = A^{-1}(B - AB) \quad X = A^{-1}(B - AB)$$

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -6 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

2)

a) Sea x la longitud en metros de un lado e y la longitud del otro lado. El área de la zona es

$$xy = 400 \quad \rightarrow \quad y = \frac{400}{x}$$

El coste de la valla es:

$$f(x) = 100 \cdot 2x + 100 \cdot 2y = 200x + 200y = 200(x + y) = 200 \left(x + \frac{400}{x} \right)$$

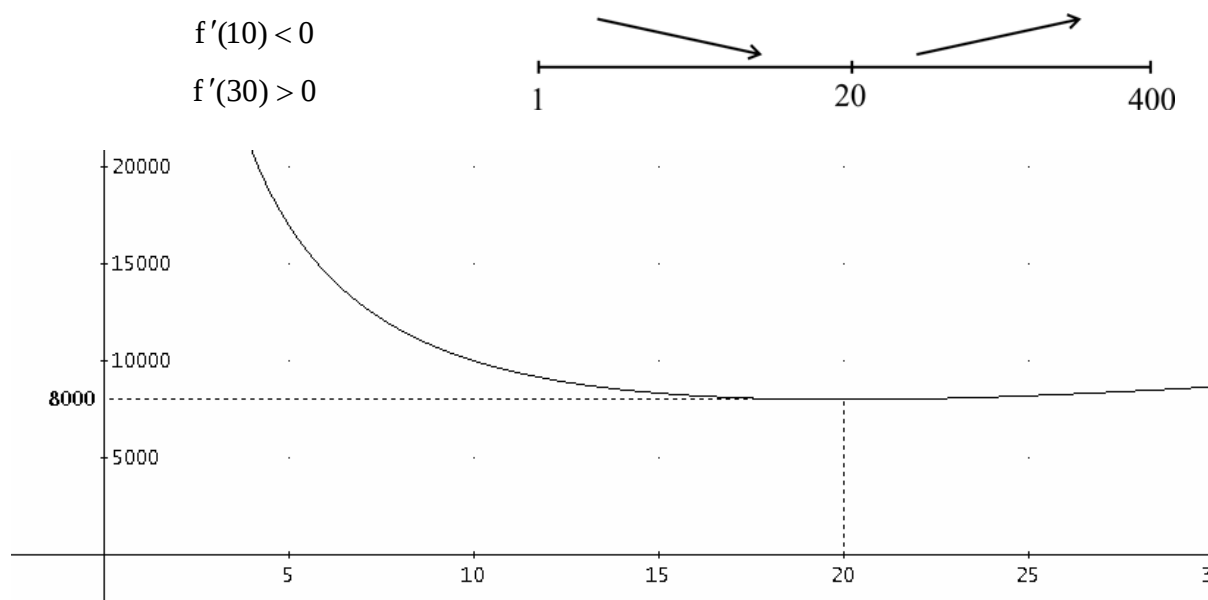
El dominio de la función es $\forall x > 0$.

b) Derivamos la expresión anterior y la igualamos a cero

$$f'(x) = 200 \left(1 - \frac{400}{x^2} \right) = 0 \quad 1 - \frac{400}{x^2} = 0 \quad \frac{400}{x^2} = 1 \quad x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 20 \text{ m} \\ y = 20 \text{ m} \end{cases}$$

Es un cuadrado de lado 20 m.

Si queremos comprobar que es un mínimo estudiamos la monotonía.



3)

$$\text{a) Filosofía } \begin{cases} \bar{x} = 5'857 \\ \sigma_x = 1'807 \end{cases} \quad \text{Literatura } \begin{cases} \bar{y} = 6'571 \\ \sigma_y = 1'498 \end{cases}$$

$$\text{b) } \sigma_{xy} = \frac{279}{7} - 5'857 \cdot 6'571 = 1'3707 \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1'3707}{1'807 \cdot 1'498} = 0'506$$

lo que significa que casi no hay dependencia entre las dos variables.

c) Al eliminar la última nota de Filosofía (que aumenta respecto de las otras notas) y la última nota de Literatura (que disminuye respecto de las otras notas), la correlación ahora sí es significativa.

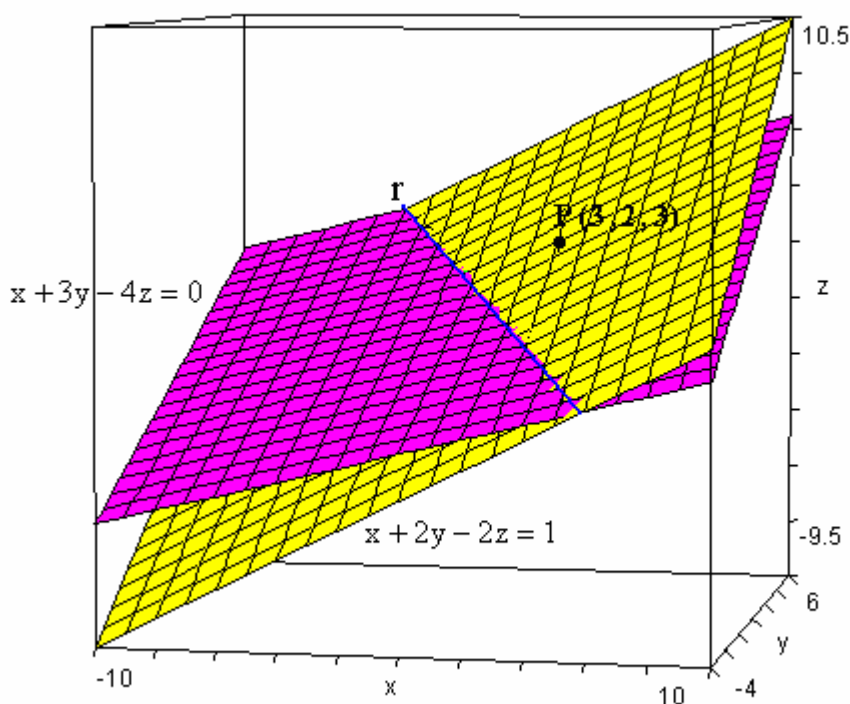
4)

a) Calculamos la recta intersección de los planos resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad z = \lambda \quad \begin{cases} x + 3y = 4\lambda \\ x + 2y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $A(3, -1, 0)$ es un punto de la recta r y $\vec{u} = (-2, 2, 1)$ un vector de dirección, el vector que va desde A hasta P es $\vec{AP} = (3, 2, 3) - (3, -1, 0) = (0, 3, 3)$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}|}{3} = \frac{\sqrt{9+36+36}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$



Es fácil comprobar que el punto P pertenece al plano $x + 2y - 2z = 1$ ya que verifica su ecuación.

b) Un punto cualquiera de la recta r tiene que verificar su ecuación.

Sea el punto $M(3 - 2\lambda, -1 + 2\lambda, \lambda)$.

$$d(P, M) = \sqrt{5} \quad \sqrt{(3 - 2\lambda - 3)^2 + (-1 + 2\lambda - 2)^2 + (\lambda - 3)^2} = \sqrt{5} \cdot 3$$

$$(3 - 2\lambda - 3)^2 + (-1 + 2\lambda - 2)^2 + (\lambda - 3)^2 = 45 \quad (-2\lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2 + (\lambda - 3)^2 = 45$$

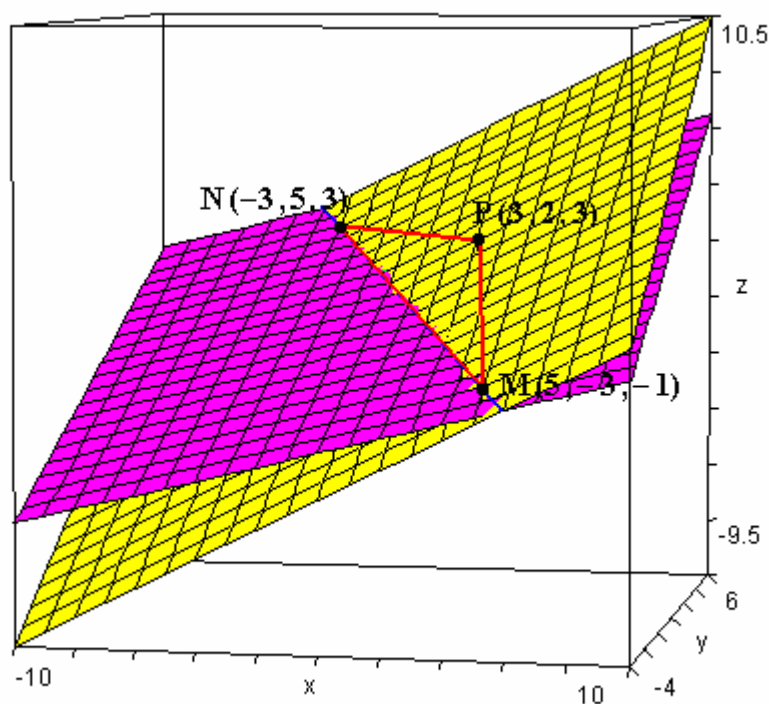
$$(-2\lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2 + (\lambda - 3)^2 = 45 \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Los puntos son: $M(5, -3, -1)$ y $N(-3, 5, 3)$.

c) El área del triángulo de vértices P, M y N es:

$$\overrightarrow{MP} = (3, 2, 3) - (5, -3, -1) = (-2, 5, 4) \quad \overrightarrow{MN} = (-3, 5, 3) - (5, -3, -1) = (-8, 8, 4)$$

$$A = \frac{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}|}{2} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \end{vmatrix} \right|}{2} = \frac{|-12\vec{i} - 24\vec{j} + 24\vec{k}|}{2} = \frac{\sqrt{144 + 576 + 576}}{2} = \frac{36}{2} = 18$$



Septiembre 2003 opción B. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1)

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{Adj}(P)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

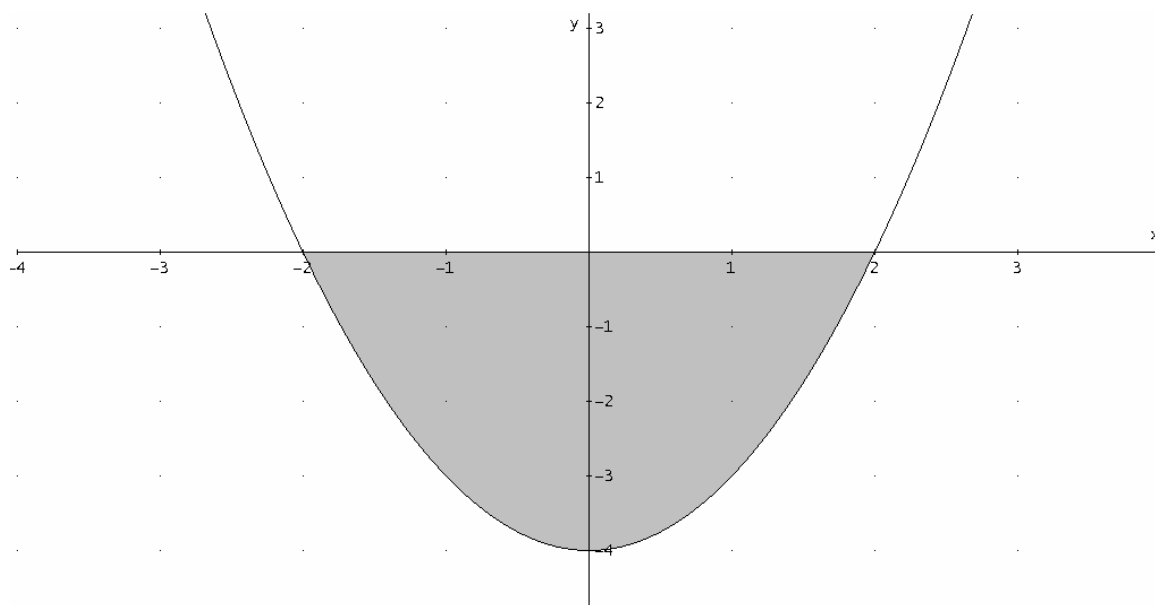
$$b) P^{-1}XP = Q \quad PP^{-1}XPP^{-1} = PQP^{-1} \quad X = PQP^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) [PQP^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$$

2)

a)



Por simetría:

$$A = 2 \left| \int_0^2 (x^2 - 4) dx \right| = 2 \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^2 \right| = 2 \left| \frac{8}{3} - 8 - 0 \right| = 2 \left| \frac{-16}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$

$$b) V_{OX} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\text{Por simetría: } V_{OX} = 2\pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2$$

$$V_{OX} = 2\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{512\pi}{15} u^3$$

3)

a) Es una distribución normal $N(68'5, 10)$.

$$p(48 \leq x \leq 71) = p\left(\frac{48 - 68'5}{10} \leq z \leq \frac{71 - 68'5}{10}\right) =$$

$$p(-2'5 \leq z \leq 0'25) = p(z \leq 0'25) - p(z \leq -2'5) = p(z \leq 0'25) - p(z \geq 2'5) =$$

$$p(z \leq 0'25) - [1 - p(z \leq 2'5)] = p(z \leq 0'25) + p(z \leq 2'5) - 1 = 0'5987 + 0'9938 - 1 = 0'5925$$

El n° de estudiantes que pesan entre 48 y 71 kg es de: $0'5925 \cdot 500 \cong 296$

$$b) p(x \geq 91) = p\left(z \geq \frac{91 - 68'5}{10}\right) = p(z \geq 2'25) = 1 - p(z \leq 2'25) = 1 - 0'9878 = 0'0122$$

El n° de estudiantes que pesan más de 91 kg es de: $0'0122 \cdot 500 \cong 6$

$$c) p(x \geq 75) = p\left(z \geq \frac{75 - 68'5}{10}\right) = p(z \geq 0'65) = 1 - p(z \leq 0'65) = 1 - 0'7422 = 0'2578$$

Es una distribución Binomial $B(5, 0'2578)$ donde $p = 0'2578$ y $q = 1 - 0'2578 = 0'7422$

$$p(x = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0'2578^2 \cdot 0'7422^3 = 0'2717$$

4)

a) Ecuación del plano π : Sean $A(0, 2, 1)$, $B(3, -1, 1)$ y $C(1, -1, 5)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3, -1, 1) - (0, 2, 1) = (3, -3, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (1, -1, 5) - (0, 2, 1) = (1, -3, 4) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad 2x + 2y + z - 5 = 0$$

Ecuación del plano π' : Sean $D(3, 0, 2)$, $E(2, 1, 1)$ y $F(5, 4, -2)$

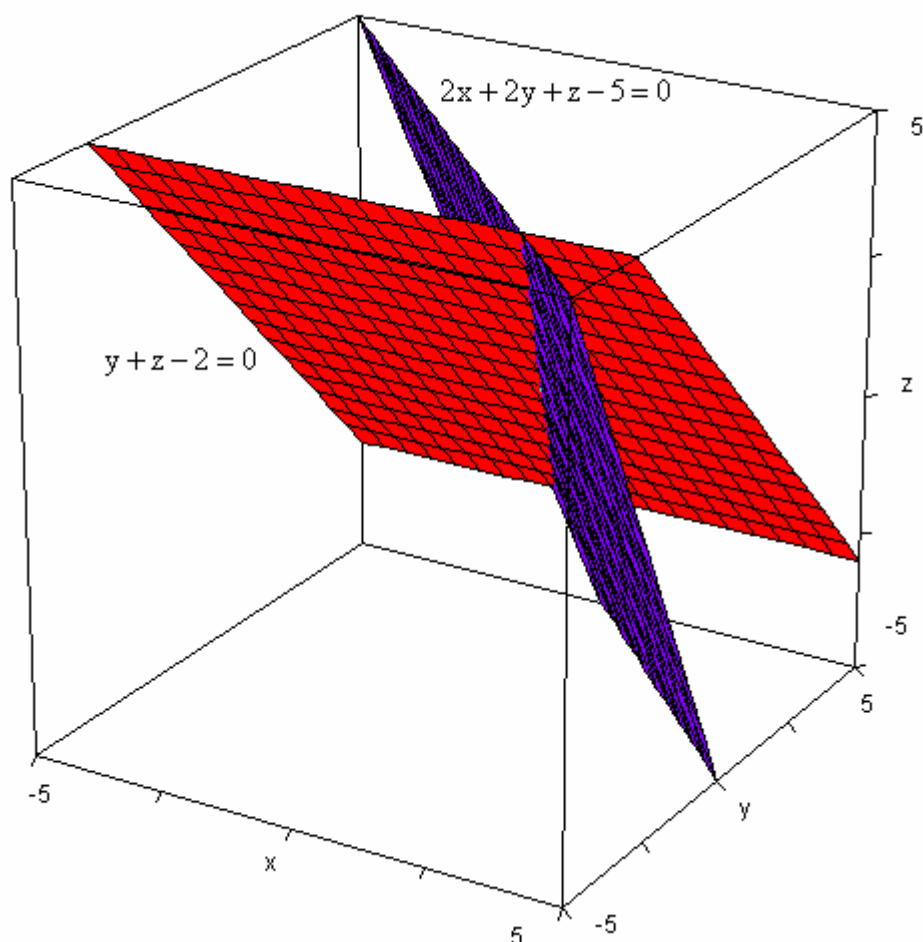
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= (2, 1, 1) - (3, 0, 2) = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{DF} &= (5, 4, -2) - (3, 0, 2) = (2, 4, -4) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad y + z - 2 = 0$$

La recta intersección de los dos planos se obtiene resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{array} \right\} \quad z = \lambda \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 5 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Los vectores característicos de los planos son: $\vec{n} = (2, 2, 1)$ y $\vec{n}' = (0, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|(2, 2, 1) \cdot (0, 1, 1)|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|0 + 2 + 1|}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



c) El plano pertenece al haz de planos que contienen a la recta r.

$$2x + 2y + z - 5 + \lambda(y + z - 2) = 0 \quad 2x + (2 + \lambda)y + (1 + \lambda)z - 2\lambda - 5 = 0$$

Como los planos son perpendiculares, sus vectores característicos son perpendiculares y por tanto el producto escalar es cero.

$$(2, 2, 1) \cdot (2, 2 + \lambda, 1 + \lambda) = 0 \quad 4 + 4 + 2\lambda + 1 + \lambda = 0 \quad \lambda = -3$$

El plano tiene por ecuación: $2x - y - 2z + 1 = 0$

