Junio 2011

OPCIÓN A

Problema A.1

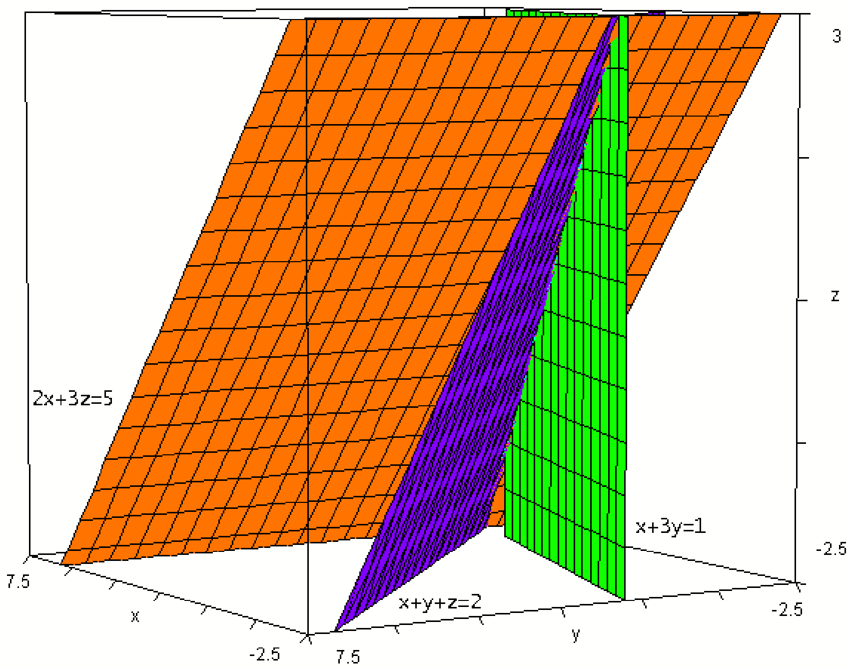
a) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x+3z&=5\\ x+3y&=1\end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&3&5\\1&3&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&1&1\\0&2&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

La tercera ecuación la podemos eliminar porque es combinación lineal de las otras dos. El sistema es compatible indeterminado, por lo tanto tiene infinitas soluciones.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ -2y+z&=1\end{aligned}\right\} \xrightarrow{z=\lambda} \left.\begin{aligned} x+y&=2-\lambda\\ -2y&=1-\lambda\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{5-3\lambda}{2},\frac{-1+\lambda}{2},\lambda\right)$$

Dado que el sistema es compatible indeterminado, deducimos que los tres planos se cortan dos a dos según una misma recta.



b) Como que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas sabemos por Cramer que para que el sistema tenga solución única basta con que el determinante de los coeficientes del sistema sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\1&3&m-2\end{vmatrix}=9-(9+2m-4)=-2m+4 \qquad -2m+4=0 \;\Rightarrow\; m=2$$

Para $m \neq 2$ el sistema tiene solución única. Lo que hay son infinitos sistemas todos ellos compatibles determinados.

c) Sustituimos las coordenadas del punto $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ en las ecuaciones del sistema y calculamos m.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}-\frac{1}{2}&=m \\ 2\cdot\frac{3}{2}&=2m+1 \\ \frac{3}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)&=m-1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m&=1 \\ 3&=2m+1 \\ 0&=m-1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m&=1 \\ m&=1 \\ m&=1 \end{aligned}\right\}$$

Problema A.2

a) Calculamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s.

Recta r: $\left.\begin{aligned} x+z&=2 \\ 2x-y+z&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{z=\lambda} \left.\begin{aligned} x&=2-\lambda \\ 2x-y&=-\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} &A(2,4,0) \\ &\vec{u}=(1,1,-1) \end{aligned}$

Recta s: $\left.\begin{aligned} 2x-y&=3 \\ x-y-z&=2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{z=\mu} \left.\begin{aligned} 2x-y&=3 \\ x-y&=2+\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\mu \\ y=-1-2\mu \\ z=\mu \end{cases} \quad \begin{aligned} &B(1,-1,0) \\ &\vec{v}=(1,2,-1) \end{aligned}$

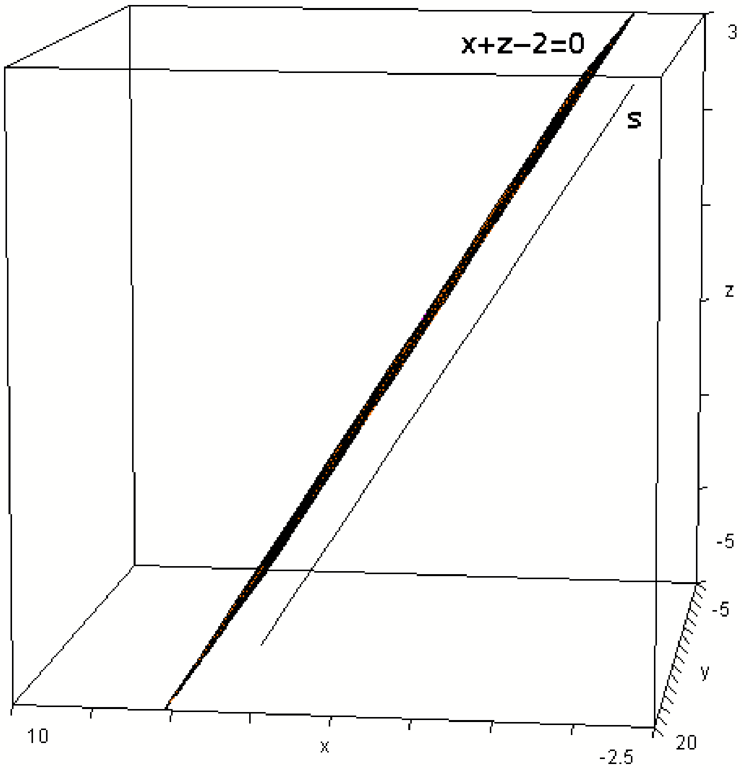
b) Dado que $\vec{u} \neq k\,\vec{v}$ las rectas ni son paralelas ni coinciden, luego se cortan o se cruzan. Si las rectas se cortan, los vectores $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ y $\vec{v}$ estarán situados en el mismo plano, es decir, serán linealmente dependientes y por lo tanto el valor del determinante formado por las componentes de los tres vectores tiene que ser nulo. En caso contrario las rectas se cruzarán.

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)-(2,4,0)=(-1,-5,0)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1+5-(2+5)=-1 \quad \Rightarrow \quad \text{Las rectas r y s se cruzan}$$

c) Del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s conocemos un punto de r y su vector de dirección y además conocemos el vector de dirección de s que será un vector paralelo al plano pedido. Por tanto la ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad -x+2-y+4+2z-(z-2x+4-y+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x+z-2=0$$



Problema A.3

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ $\qquad x^2-3x+2=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

<u>Dominio</u> $D=\forall x\in R-\{1,2\}$

<u>Asíntotas verticales</u>

Son asíntotas verticales aquellos valores de “x” que anulan el denominador *pero no anulan el numerador*. Como el valor que anula el numerador es $x=0$ quiere decir que las rectas $x=1$ y $x=2$ son asíntotas verticales. Veamos los límites laterales cuando x tiene a 1 y cuando tiende a 2.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{(x-1)(x-2)}=+\infty \\ &\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(x-1)(x-2)}=-\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{(x-1)(x-2)}=-\infty \\ &\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x-1)(x-2)}=+\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x=2 \text{ es una asíntota vertical}$$

<u>Asíntotas horizontales</u>

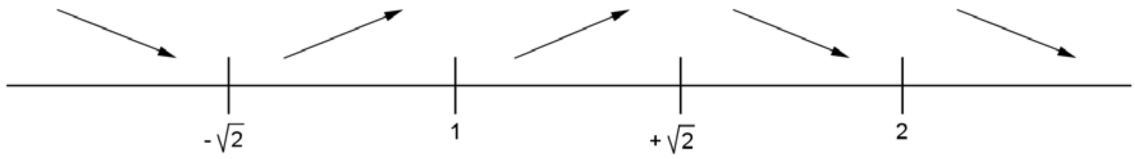
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=0 \quad \text{es una asíntota horizontal}$$

Por ser una función racional, si hay asíntotas horizontales no hay asíntotas oblicuas.

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-3x+2-x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{-x^2+2}{(x^2-3x+2)^2}$

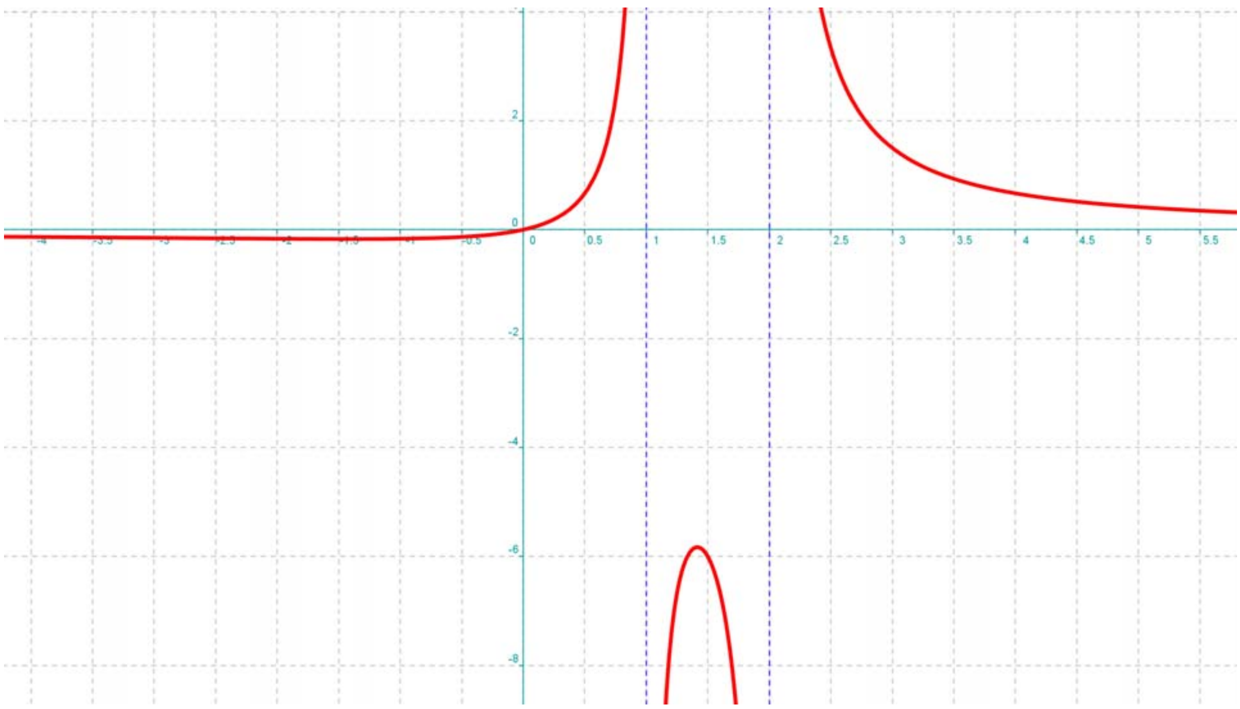
$$-x^2+2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ x=+\sqrt{2} \end{cases} \qquad\qquad x^2-3x+2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f'(-2)<0 \qquad f'(0)>0 \qquad f'(1'1)>0 \qquad f'(1'8)<0 \qquad f'(3)<0$$



$f(x)$ es creciente $\forall x \in \left]-\sqrt{2},1\right[\cup \left]1,\sqrt{2}\right[$

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2},2\right[\cup \left]2,\infty\right[$



c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,dx$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$x = A(x-2)+B(x-1) \qquad \begin{array}{l} \text{Si } x=2 \quad \Rightarrow \quad B=2 \\ \text{Si } x=1 \quad \Rightarrow \quad A=-1 \end{array}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + K$$

OPCIÓN B

Problema B.1

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{vmatrix}=-m^3+m-(2m)=-m^3-m=0$

$$m^3+m=0 \qquad m(m^2+1)=0 \qquad \begin{cases} m=0\\ m=\sqrt{-1}\end{cases}$$

El único valor posible es $m=0$ ya que $m=\sqrt{-1}$ no pertenece al conjunto de los números reales.

Si $m\neq 0 \;\Rightarrow\; rgA=3$

Si $m=0 \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; rgA=2$

b) Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero. Como en el apartado a) hemos comprobado que el único valor que anula el determinante de la matriz es $m=0$ esto significa que para $m=1$ el determinante de A es distinto de cero y por tanto para ese valor existe matriz inversa.

c) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad |A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2$ $\qquad A^{-1}=\dfrac{(AdjA)^t}{|A|}$

$AdjA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad (AdjA)^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-2}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -0'5 & 0'5\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -0'5 & 0'5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -0'5 & 0'5\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -0'5 & 0'5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -0'5 & 0'5\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -0'5 & 0'5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Problema B.2

a) $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vec{u}_r=(1,-1,0) \\ \vec{v}_s=(1,1,1) \end{matrix}$

b) El vector normal o característico del plano que es perpendicular a la recta r es el mismo que el vector de dirección de la recta r, por tanto: $\vec{n}=\vec{u}_r=(1,-1,0)$.

La ecuación implícita del plano es $Ax+By+Cz+D=0$, donde A, B y C son las componentes del vector normal del plano.

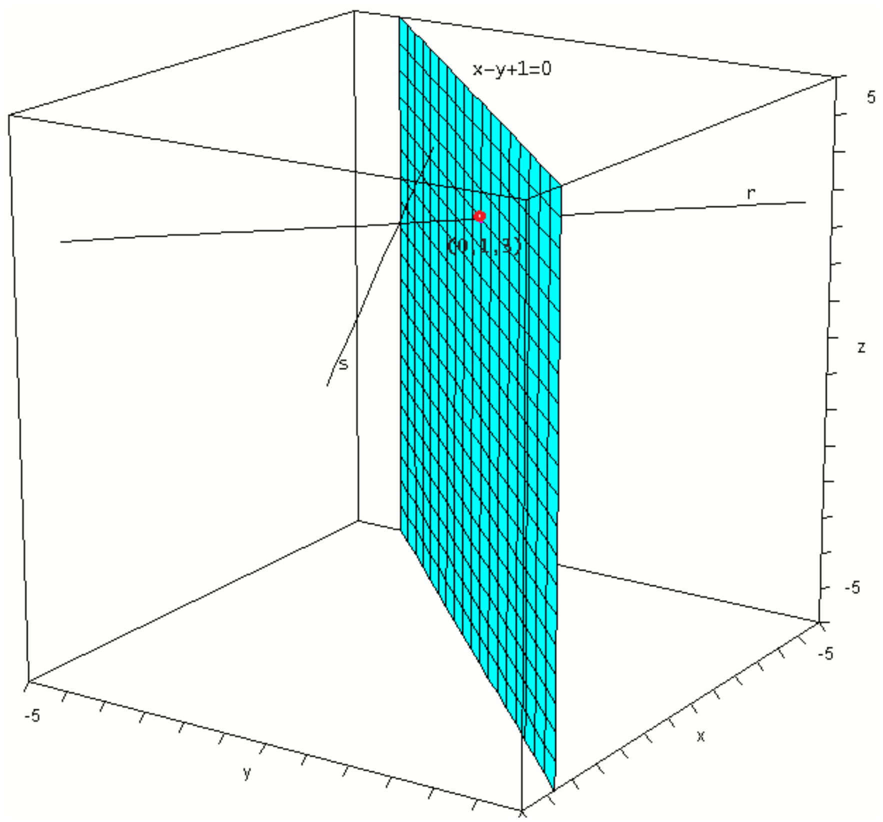
$$1\cdot x-1\cdot y+0\cdot z+D=0 \qquad x-y+D=0$$

Como el punto $(0,1,3)$ pertenece al plano tiene que verificar su ecuación.

$$0-1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=1$$

La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por el punto $(0,1,3)$ es:

$$x-y+1=0$$



c) Para calcular el punto donde se cortan las recta r y s resolvemos el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de las dos, igualando las variables.

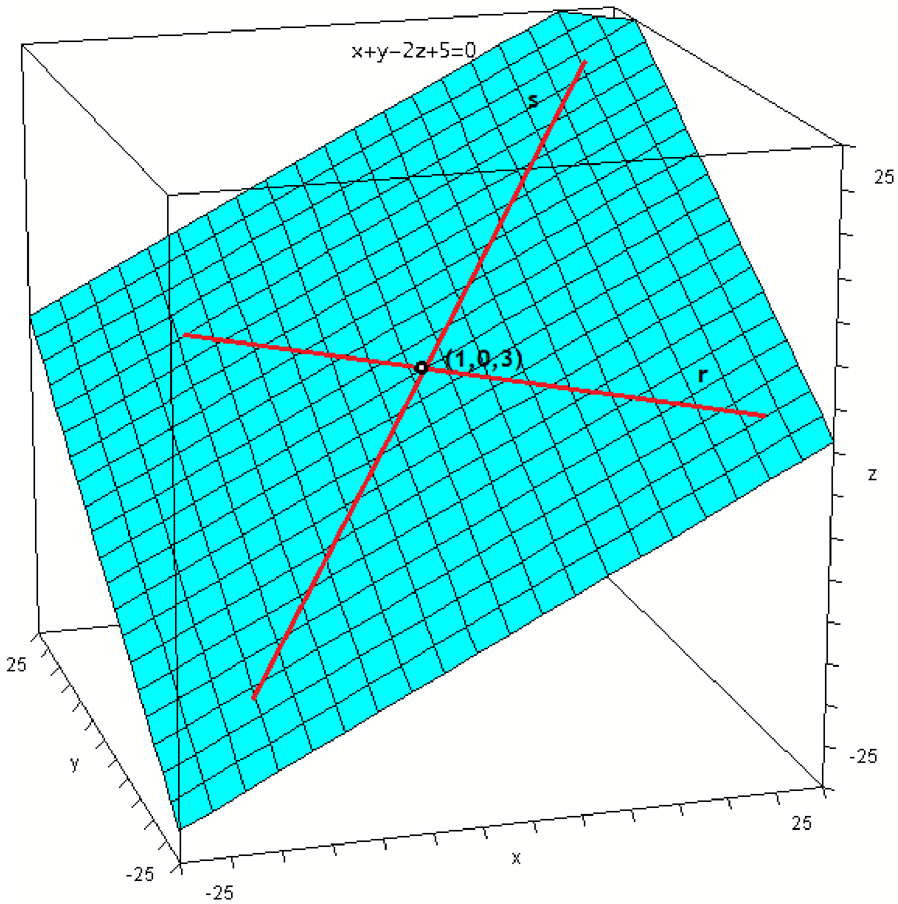
$$\left.\begin{array}{r}\lambda = 1+\mu \\ 1-\lambda = \mu \\ 3 = 3+\mu\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda = 1 \\ \mu = 0\end{cases}$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de r ó s obtenemos las coordenadas del punto buscado.

$$r:\begin{cases}x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3\end{cases} \qquad \text{El punto es el } P(1,0,3)$$

Conociendo el punto $P(1,0,3)$ de corte de r y s y los vectores de dirección de las dos rectas. La ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x+1+z-3-(-z+3+y) = 0 \qquad x+y-2z+5=0$$

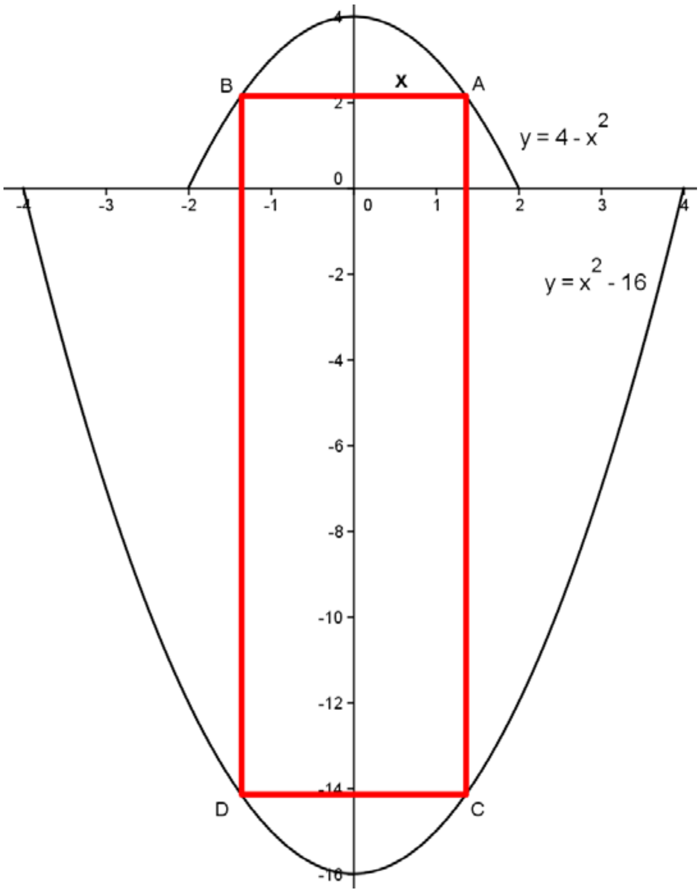


Problema B.3

Representamos gráficamente las parábolas $y=4-x^2 \quad \forall x \in [-2,2]$ e $y=x^2-16 \quad \forall x \in [-4,4]$

$y=4-x^2$ Puntos de corte con los ejes $(-2,0)$, $(2,0)$ y $(0,4)$. Máximo en $(0,4)$

$y=x^2-16$ Puntos de corte con los ejes $(-4,0)$, $(4,0)$ y $(0,-16)$. Mínimo en $(0,-16)$



a) El vértice A tiene de coordenadas $(x, 4-x^2)$ ya que pertenece a la parábola $y=4-x^2$ y el vértice C tiene de coordenadas (x, x^2-16) ya que pertenece a la parábola $y=x^2-16$. El área del rectángulo es el producto de la base, en este caso 2x, por la altura, que corresponde a la distancia entre A y C.

$$d(A,C)=\sqrt{(x-x)^2+(4-x^2-(x^2-16))^2}=\sqrt{(20-2x^2)^2}=20-2x^2$$

$$S(x)=2x(20-2x^2)=40x-4x^3$$

b) $S'(x)=40-12x^2=0 \qquad 12x^2=40 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{10}{3}}$

$S''(x)=-24x \qquad S''\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)=-24\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}<0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{10}{3}}$ es máximo.

c) $S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)=40\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}-4\cdot\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3=48'68$ u.a.