Junio 2010

OPCIÓN A

Problema A.1

a) Si observamos los desarrollos de $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$ vemos que se diferencian en el cuadrado de la matriz unitaria. Dado que en este caso $AI = IA$ se verifica:

$$\left.\begin{aligned}(A-I)^2 &= A^2 - 2AI + I^2\\ A(A-2I) &= A^2 - 2AI\end{aligned}\right\} \Rightarrow (A-I)^2 = A(A-2I) + I^2$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A-2I) = (A-I)^2 - I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

b)

b.1) Para que exista la matriz inversa, su determinante debe de ser distinto de cero. Aplicando la propiedad de las matrices que dice que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices tenemos:

$$|A(A-2I)| = |A||A-2I| = |-I| = -1 \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A-2I| \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto existen A^{-1} y $(A-2I)^{-1}$

b.2) $\left|(A-I)^2\right| = 0$ por ser $(A-I)^2$ la matriz nula.

c) Tal y como hemos obtenido al final del apartado a) sabemos que $-I = A(A-2I)$

Multiplicando por la izquierda los dos miembros de la igualdad por A^{-1} obtenemos:

$$A^{-1}(-I) = A^{-1}A(A-2I) = I(A-2I) = A-2I \rightarrow -A^{-1} = A-2I \Rightarrow A^{-1} = -(A-2I)$$

es decir, $\lambda = -1$.

Problema A.2

a) Calculamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s.

Recta r

$$\left.\begin{array}{r} 5x+y=4+\lambda \\ 2x-2y=-5+\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\lambda \\ y=\dfrac{11}{4}-\dfrac{1}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Procuramos que, tanto las coordenadas del punto de la recta r como las componentes de su vector de dirección sean números enteros, para que sea más fácil operar con ellos.

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},1\right)=(1,-1,4)$$

Puesto que para cada valor del parámetro λ obtenemos un punto de la recta, si $\lambda=3$ las coordenadas de un punto A de la recta r serán: $A(1,2,3)$.

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1,2,3) \\ \vec{u}=(1,-1,4) \end{cases}$

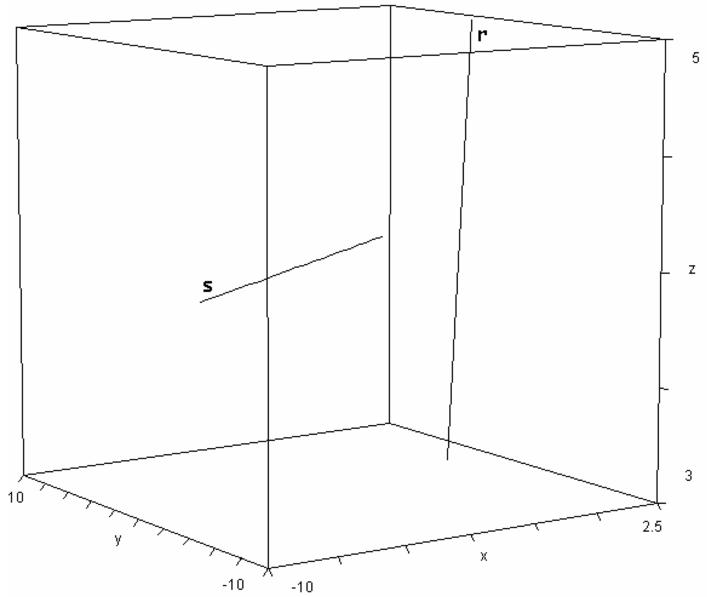
Recta s

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-5 \\ z=4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=-5+\mu \\ y=\mu \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-5,0,4) \\ \vec{v}=(1,1,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=(-5,0,4)-(1,2,3)=(-6,-2,1)$$

Si las rectas se cruzan, el $\det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})$ tiene que ser distinto de cero, ya que los tres vectores son linealmente independientes.

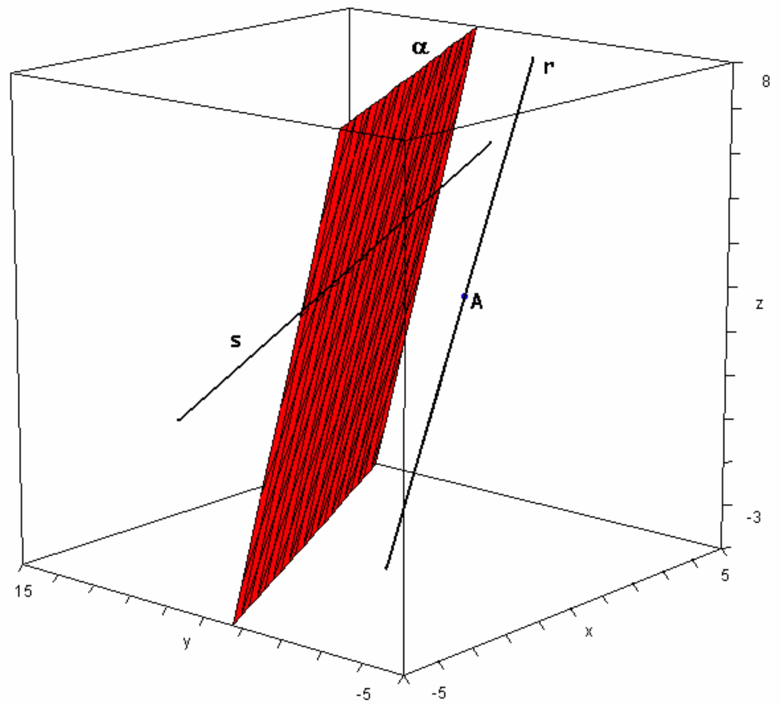
$$\begin{vmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=18\neq 0$$



b) Calcular la distancia entre r y s es lo mismo que calcular la distancia desde un punto A de r al plano α que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

La ecuación del plano α es: $\begin{vmatrix} x+5 & y & z-4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x-2y-z+14=0$

$$d(A,\alpha) = \frac{|2\cdot 1 - 2\cdot 2 - 1\cdot 3 + 14|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ u.l.}$$



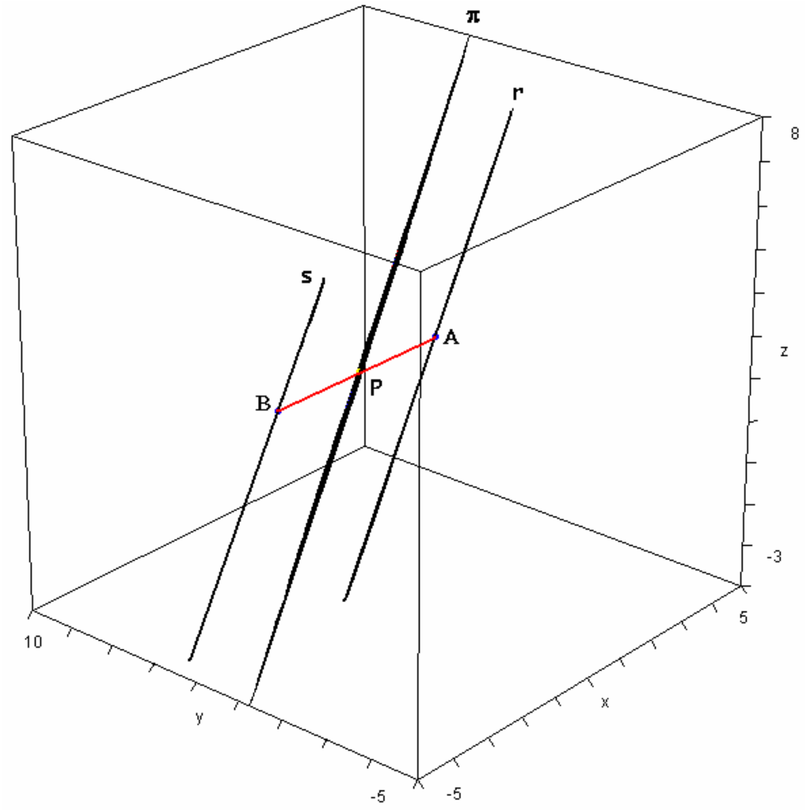
c) El plano π que es paralelo y equidistante de las rectas r y s es un plano que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (cualesquiera que sean los dos puntos que escojamos de las rectas r y s) y que tiene como vectores los de las rectas r y s, es decir, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El punto medio, P, entre A y B es:

$$x = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad y = \frac{2+0}{2} = 1 \qquad z = \frac{3+4}{2} = 3'5 \qquad P(-2, 1, 3'5)$$

La ecuación del plano π pedido es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-3'5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \pi : 4x-4y-2z+19=0$$



Problema A.3

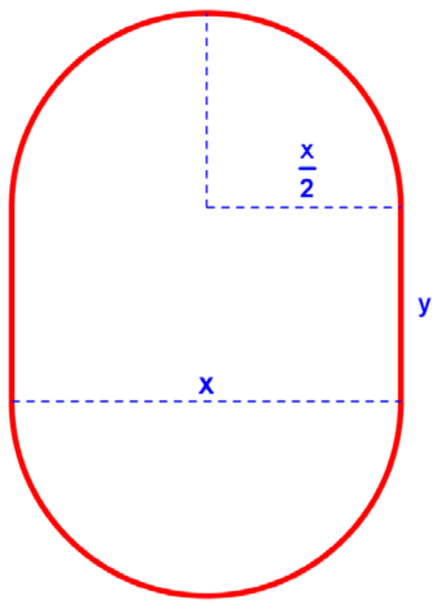
a) Conocemos el dato de que la superficie del estadio es de $10000\,m^2$.

$$S = 10000 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x\,y = \frac{\pi x^2}{4} + xy$$

$$y = \frac{10000 - \frac{\pi x^2}{4}}{x} = \frac{40000 - \pi x^2}{4x}$$

$$P = 2\pi\frac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y = \pi x + \frac{40000 - \pi x^2}{2x}$$

$$P = \frac{2\pi x^2 + 40000 - \pi x^2}{2x} = \frac{\pi x^2 + 40000}{2x}$$



b) $f(x) = 1\cdot 2y + 2\cdot\left(2\pi\frac{x}{2}\right) = 2y + 2\pi x = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + 2\pi x = \frac{3\pi x^2 + 40000}{2x}$

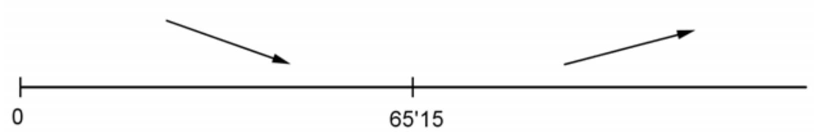
c) La función está definida para $x > 0$.

$$f'(x)=\frac{6\pi x\cdot 2x-(3\pi x^2+40000)\,2}{4x^2}=\frac{6\pi x^2-80000}{4x^2}=\frac{3\pi x^2-40000}{2x^2}$$

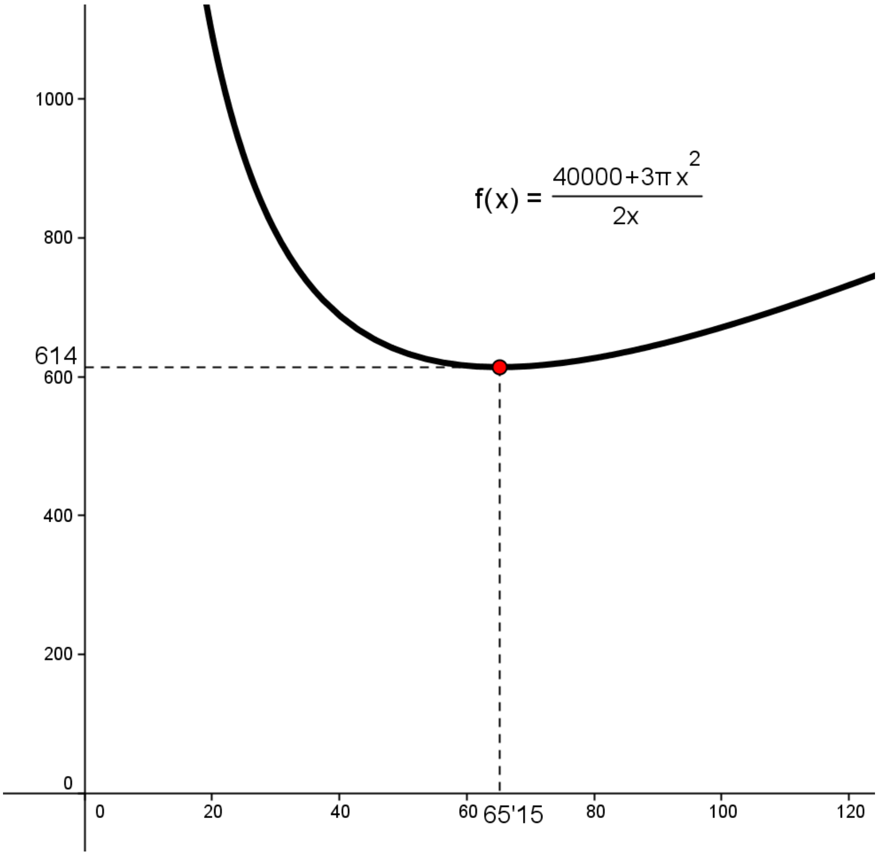
$$f'(x)=0 \qquad 3\pi x^2-40000=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{40000}{3\pi}}=65'147\,\mathrm{m}$$

$f'(10)<0$

$f'(70)>0$



En $x=65'147$ hay un mínimo, es decir, cuando el diámetro de los semicírculos exteriores es de $65'147\,\mathrm{m}$ el coste de la valla es mínimo y su valor es de $f(65'147)\approx 614\,€$



OPCIÓN B

Problema B.1

a)

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+z=6 \\ 3x+2y-4z=0 \\ -2y+2z=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+z=6 \\ 3x+2y-4z=0 \\ -y+z=2 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible, como se deduce de la 1ª y 3ª ecuaciones.

b)

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+2b+3=3c \\ 3-4b-6c=a \\ 5a-4+3c=-4b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+2b-3c=-3 \\ -a-4b-6c=-3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+5F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{pmatrix}$$

Como el $m.c.m(6,16)=2^4\cdot 3=48$ multiplicamos la segunda fila por 8 y la tercera por -3.

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -48 & -120 & -72 \\ 0 & 48 & 81 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -48 & -120 & -72 \\ 0 & 0 & -39 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -a-4b-6c=-3 \\ -48b-120c=-72 \\ -39c=-39 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{array}\right.$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-2z=1 \\ 5x-2y+z=4 \end{array}\right\}$$

Como el sistema tiene el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas, calculamos el determinante de los coeficientes del sistema.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Como el resultado es distinto de cero, el Sistema es Compatible y Determinado y tiene una única solución que es $(x,y,z)=(1,2,3)$.

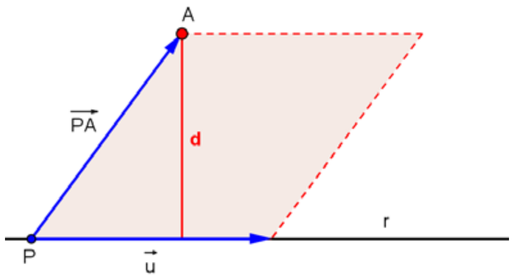
Problema B.2

La ecuación de la recta r viene dada por $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $\quad P(0,3,-1) \quad \vec{u} = (2,-1,1)$

a) La distancia "d" del punto A a la recta r la vamos a calcular por dos métodos:

Método 1:

Conocemos que el área del paralelogramo que forman los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{u}$ es $\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\right|$



$$\overrightarrow{PA} = (0,1,0) - (0,3,-1) = (0,-2,1) \qquad \overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} = (-1,2,4)$$

$$d = d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{1+4+16}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = 1'87 \text{ u.l.}$$

Método 2

Calculamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto A.

Su vector de característico coincide con el vector director de la recta r.

$$\vec{n} = \vec{u} = (2,-1,1) \quad \rightarrow \quad 2x - y + z + D = 0$$

Como el punto A pertenece al plano debe verificar su ecuación

$$2 \cdot 0 - 1 + 0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 1 \qquad \pi : 2x - y + z + 1 = 0$$

Calculamos el punto H donde se cortan la recta r y el plano π.

$$2(2t) - (3-t) + (-1+t) + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0'5 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 0'5 = 1 \\ y = 3 - 0'5 = 2'5 \\ z = -1 + 0'5 = -0'5 \end{cases} \qquad H(1, 2'5, -0'5)$$

La distancia desde A hasta r es la misma que la distancia entre los puntos A y H.

$$d(A,r) = d(A,H) = \sqrt{(1-0)^2 + (2'5-1)^2 + (-0'5-0)^2} = 1'87 \text{ u.l.}$$

b) El ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r es el mismo que el ángulo α que forman los vectores $\overrightarrow{PA}=(0,-2,1)$ y $\vec{u}=(2,-1,1)$.

$$\alpha = \arccos\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{u}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\vec{u}\right|} = \arccos\frac{(0,-2,1)(2,-1,1)}{\sqrt{4+1}\sqrt{4+1+1}} = \arccos\frac{3}{\sqrt{30}} = 56'789^{o}$$

c) Las coordenadas del punto Q se obtienen haciendo $z=0$ en la ecuación de la recta r.

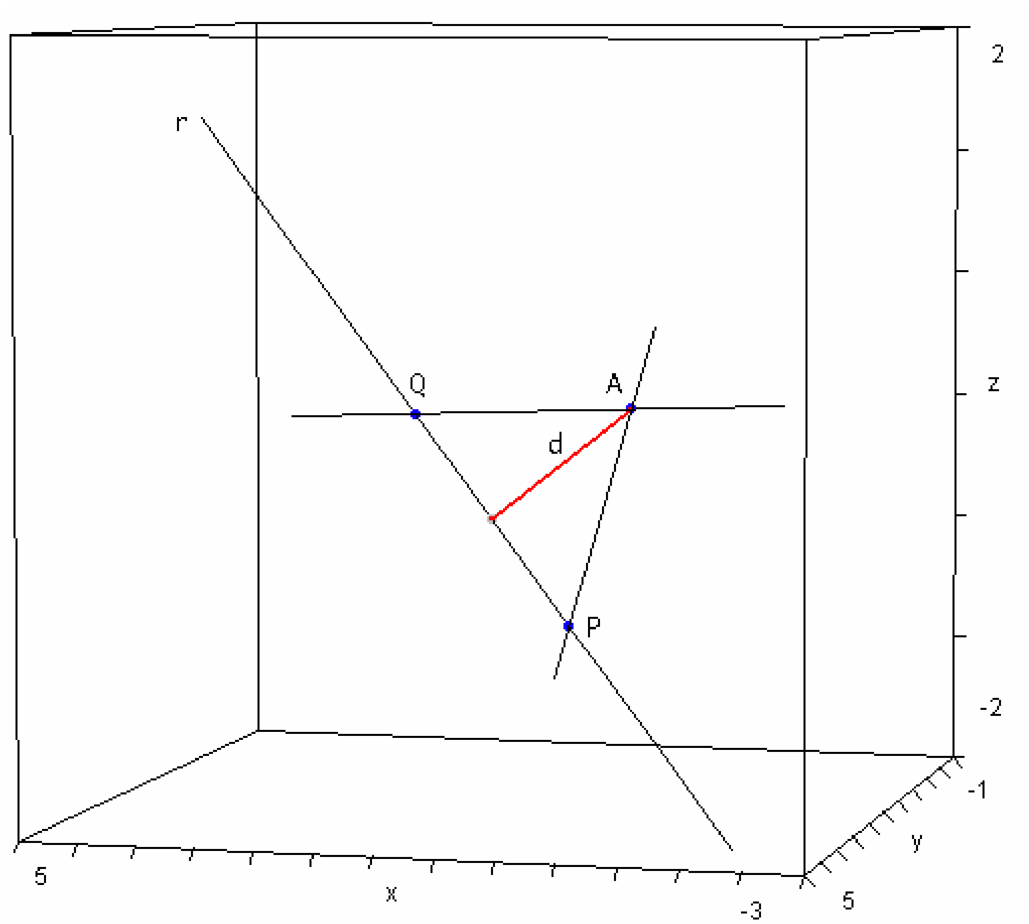
$$0=-1+t \quad\rightarrow\quad t=1 \quad\Rightarrow\quad Q(2,2,0)$$

Sea β el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{QP}=(0,3,-1)-(2,2,0)=(-2,1,-1) \qquad \overrightarrow{QA}=(0,1,0)-(2,2,0)=(-2,-1,0)$$

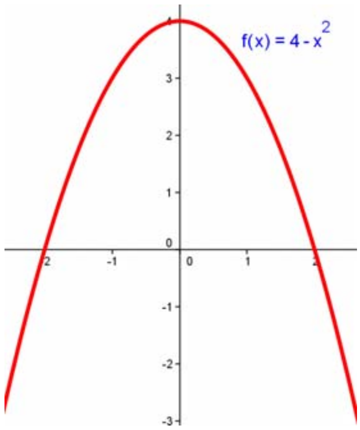
$$\beta = \arccos\frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP}}{\left|\overrightarrow{QA}\right|\left|\overrightarrow{QP}\right|} = \arccos\frac{(-2,-1,0)(-2,1,-1)}{\sqrt{4+1}\sqrt{4+1+1}} = \arccos\frac{3}{\sqrt{30}} = 56'789^{o}$$

Vemos que se verifica que el ángulo en P es igual que el ángulo en Q ($\alpha=\beta$).



Problema B.3

a) Sabemos que es una parábola convexa, por ser negativo el coeficiente de x^2. Además sabemos que es simétrica respecto del eje de ordenadas, $f(-x)=f(x)$, y que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(0,4)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$. Con estos datos su representación gráfica es inmediata.



b) Las pendientes de dos rectas perpendiculares son inversas y cambiadas de signo, es decir $m=-\dfrac{1}{m'}$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=4-x^2$ en cualquiera de sus puntos es la derivada de dicha función $m=f'(x)=-2x$

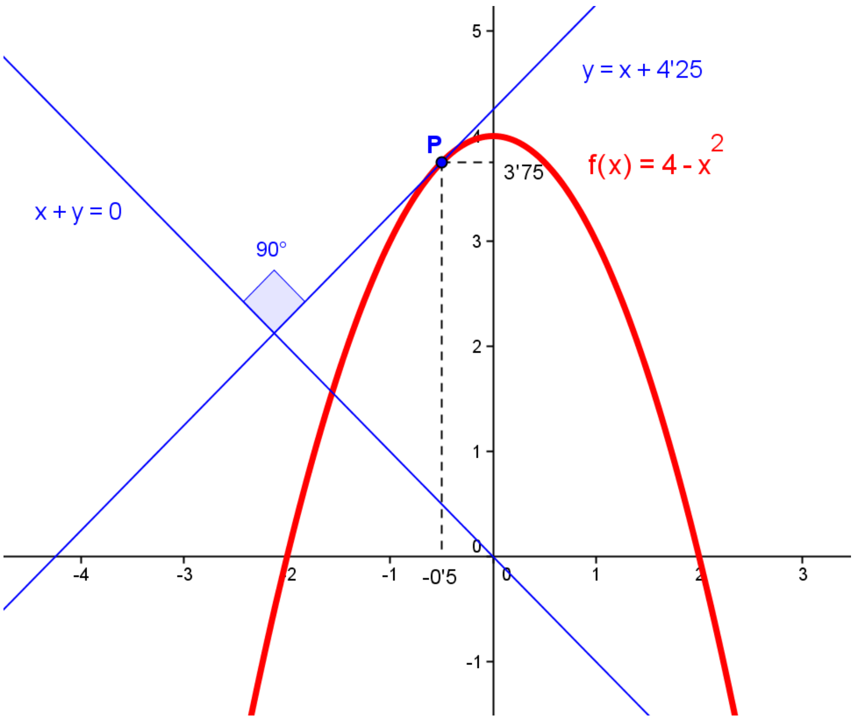
La pendiente de la recta de ecuación $y=-x$ es $m'=y'=-1$

Como $m=-\dfrac{1}{m'} \;\rightarrow\; -2x=-\dfrac{1}{-1} \;\Rightarrow\; x=-0'5 \;\Rightarrow\; f(-0'5)=4-(0'5)^2=3'75$

El punto P tiene de coordenadas $P(-0'5, 3'75)$

La ecuación de la recta perpendicular viene dada por la expresión:

$$y-y_0=m(x-x_0) \qquad y-3'75=-2(-0'5)(x-(-0'5)) \qquad y=x+4'25$$



c) Un punto cualquiera de la curva $y=4-x^2$ tiene por coordenadas $(x,4-x^2)$. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la curva es $-2x$ y sabemos que la recta tangente pasa por el punto $(-2,1)$.

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad \rightarrow \quad 4-x^2-1=-2x(x-(-2))$$

$$x^2+4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 & \rightarrow \quad y(-1)=4-(-1)^2=3 \\ x=-3 & \rightarrow \quad y(-3)=4-(-3)^2=-5 \end{cases}$$

Los puntos de tangencia son $A(-1,3)$ y $B(-3,-5)$

Las rectas correspondientes son:

$$A(-1,3) \rightarrow y-3=-2(-1)(x+1) \qquad y=2x+5$$

$$A(-3,-5) \rightarrow y+5=-2(-3)(x+3) \qquad y=6x+13$$