Junio 2007

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) $$|3B(x)| = \begin{vmatrix} 3x+6 & 12 & 18 \\ 6x+9 & 9 & 18 \\ 12x+12 & 6 & 18 \end{vmatrix} = \xrightarrow[F_3-F_2]{F_2-F_1} \begin{vmatrix} 3x+6 & 12 & 18 \\ 3x+3 & -3 & 0 \\ 6x+3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 \cdot \begin{vmatrix} 3x+3 & -3 \\ 6x+3 & -3 \end{vmatrix} = 162x$$

$$162x = 162 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

b) Para que la matriz $C(y)$ no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-2F_2} \begin{vmatrix} -y-1 & 1 & 0 \\ -y-1 & 1 & 0 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{por tener el determinante 2 filas iguales.}$$

Problema 1.2

a) Vamos a discutir el sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{por proporcionalidad}$$

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rgA = 3 \\ rgA^* = 3 \end{cases}$ El sistema es Compatible Determinado.

- Si $\alpha = 1$ $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ x+y+z=9 \end{array}\right\}$$

  Como la 1ª y 3ª ecuaciones son iguales eliminamos la tercera ecuación. El sistema resultante es:

  $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rgA = 2 \\ rgA^* = 2 \end{cases}$$

  El sistema es Compatible Indeterminado.

➤ Si $\alpha = 7$ $\quad \left.\begin{array}{r} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ 7x+y+z=9 \end{array}\right\}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$

Orlamos este menor de orden 2 con los términos independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rgA = 2 \\ rgA^* = 2 \end{cases}$$

Esto nos indica que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos. El sistema es Compatible Indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ 7x+y+z=9 \end{array}\right\}$ Eliminando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$ obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+7y=9-\lambda \\ 3x+5y=9-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}-\frac{\lambda}{8}, \frac{9}{8}-\frac{\lambda}{8}, \lambda\right)$$

Bloque 2. GEOMETRÍA

Problema 2.1

a) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2z-3}{6} \qquad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{-3} = \dfrac{z-\frac{3}{2}}{3} \qquad \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2}-3\lambda \\ z = \dfrac{3}{2}+3\lambda \end{cases}$

$s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4} \qquad \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+\frac{3}{2}}{1} = \dfrac{z-1}{4} \qquad \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = -\dfrac{3}{2}+\mu \\ z = 1+4\mu \end{cases}$

Para calcular el punto de corte igualamos las dos primeras ecuaciones correspondientes a las dos rectas r y s.

$$\left.\begin{array}{r} 1+2\lambda = 3-2\mu \\ \dfrac{1}{2}-3\lambda = -\dfrac{3}{2}+\mu \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 1+2\lambda = 3-2\mu \\ -3\lambda-\mu = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que las rectas se cortan sustituyendo estos valores en la 3ª ecuación.

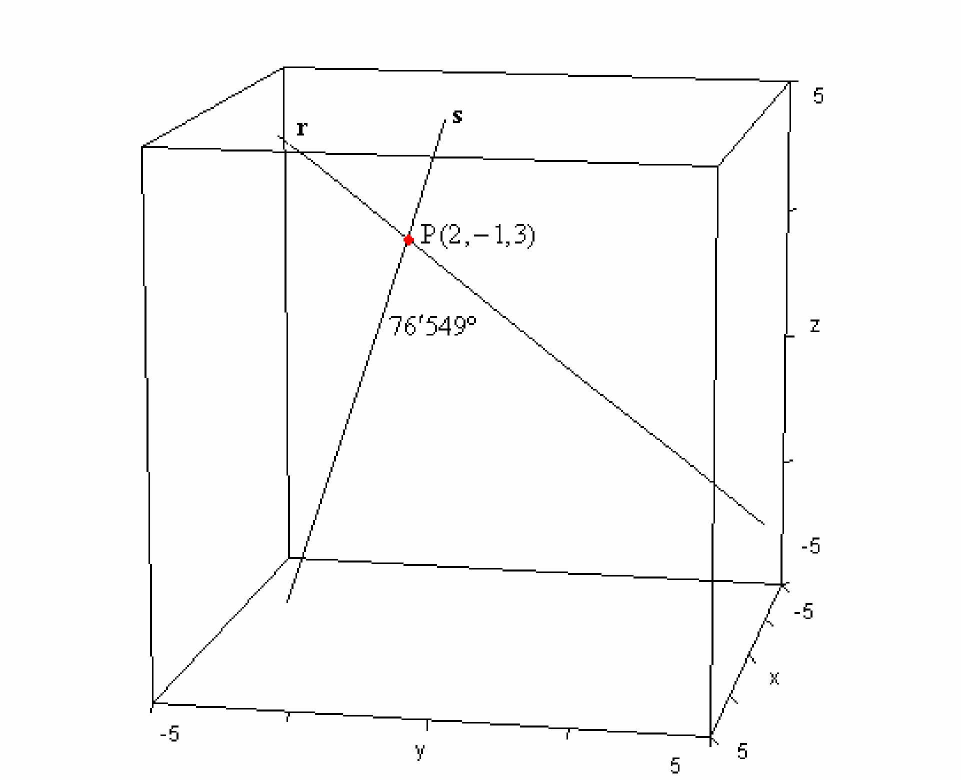
Sustituyendo los valores de λ y μ en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene el punto P de corte entre las rectas r y s.

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} = 2 \\ y = \frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} = -1 \\ z = \frac{3}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 3 \end{cases} \qquad \text{El punto de corte es } P(2,-1,3)$$

b) Un vector de dirección de r es: $\vec{u} = (2,-3,3)$ y uno de s es: $\vec{v} = (-2,1,4)$
El ángulo que forman las rectas r y s es:

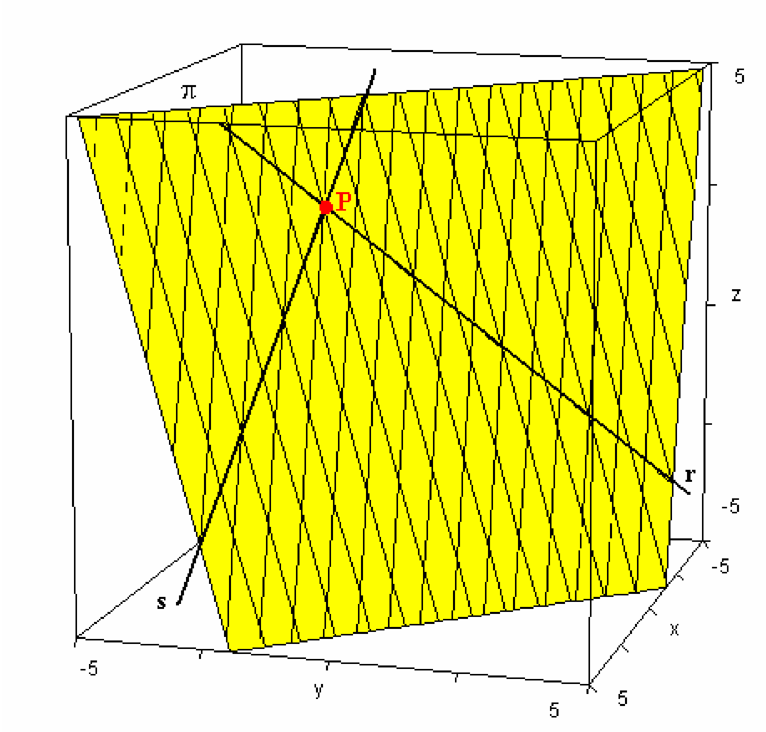
$$\alpha = \arccos\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \arccos\frac{\left|(2,-3,3)(-2,1,4)\right|}{\sqrt{4+9+9}\cdot\sqrt{4+1+16}} = \arccos\frac{\left|-4-3+12\right|}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \arccos\frac{5}{\sqrt{22}\sqrt{21}}$$

$$\alpha = \arccos 0'2326 = 1'336\ \text{rad} = 76'549^{\circ} = 76^{\circ}32'56''$$



c) Con el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ obtenemos la ecuación implícita del plano.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 15x + 14y + 4z - 28 = 0$$



Problema 2.2

a) Un punto de r es $A(-2,0,1)$ y un vector de dirección $\vec{u}=(3,-2,4)$.

$$\overrightarrow{AQ}=(3,-1,4)-(-2,0,1)=(5,-1,3)$$

La distancia del punto Q a la recta r es:

$$d(Q,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AQ}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}\right\|}{\left|\sqrt{9+4+16}\right|}=\frac{\left|2\vec{i}-11\vec{j}-7\vec{k}\right|}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}\text{ u.l.}$$

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta s son: $\begin{cases} x=3+t\\ y=-1-t\\ z=4+t\end{cases}$

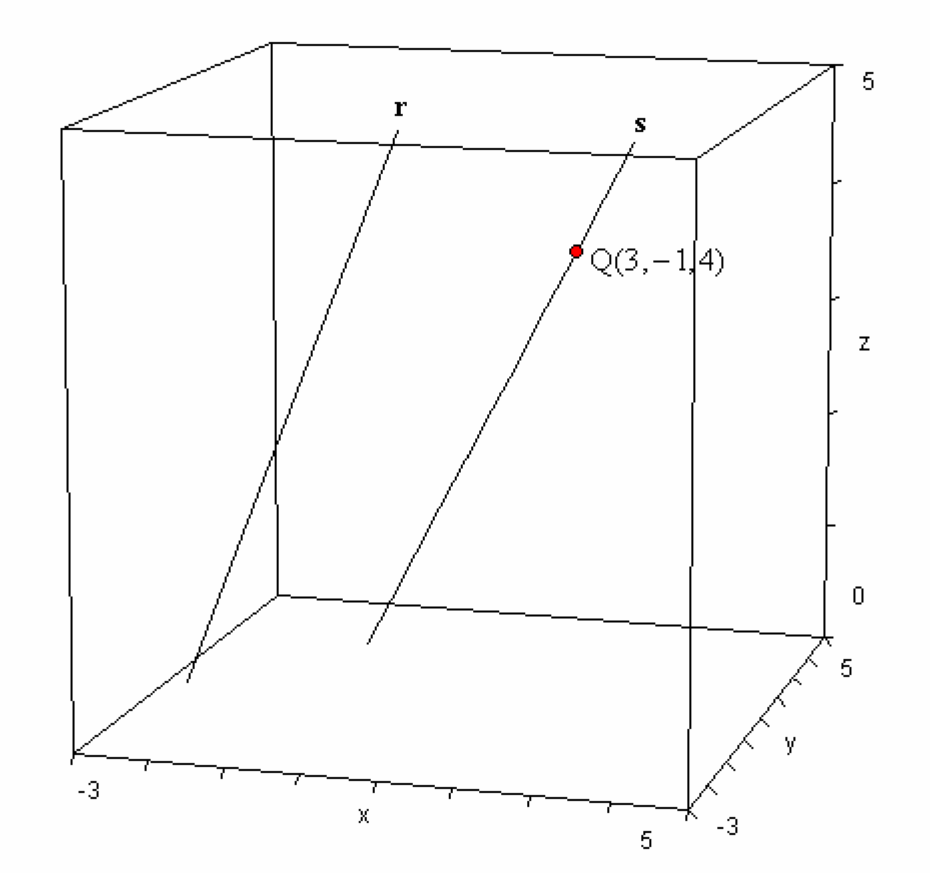
Un punto de la recta s es $B(3,-1,4)$ y un vector de dirección es $\vec{v}=(1,-1,1)$

Dado que los vectores de dirección de las rectas r y s no son proporcionales las rectas no son paralelas. Para demostrar que no se cortan (y por tanto se cruzan), el determinante formado por las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

c) La distancia entre las rectas r y s es la misma que la distancia desde el punto Q hasta la recta r, ya que ésta es el segmento perpendicular común a las dos rectas.

$$d(r,s) = d(Q,r) = \sqrt{6} \text{ u.l.}$$



Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

Las raíces del polinomio numerador son: $12x^3-8x^2+9x-5=0 \;\Rightarrow\; x=0'59$

Las raíces del polinomio denominador son: $6x^2-7x+2=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Como las raíces del denominador no coinciden con las del numerador significa que las rectas $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=\dfrac{2}{3}$ son asíntotas verticales de la función.

Asíntotas oblicuas

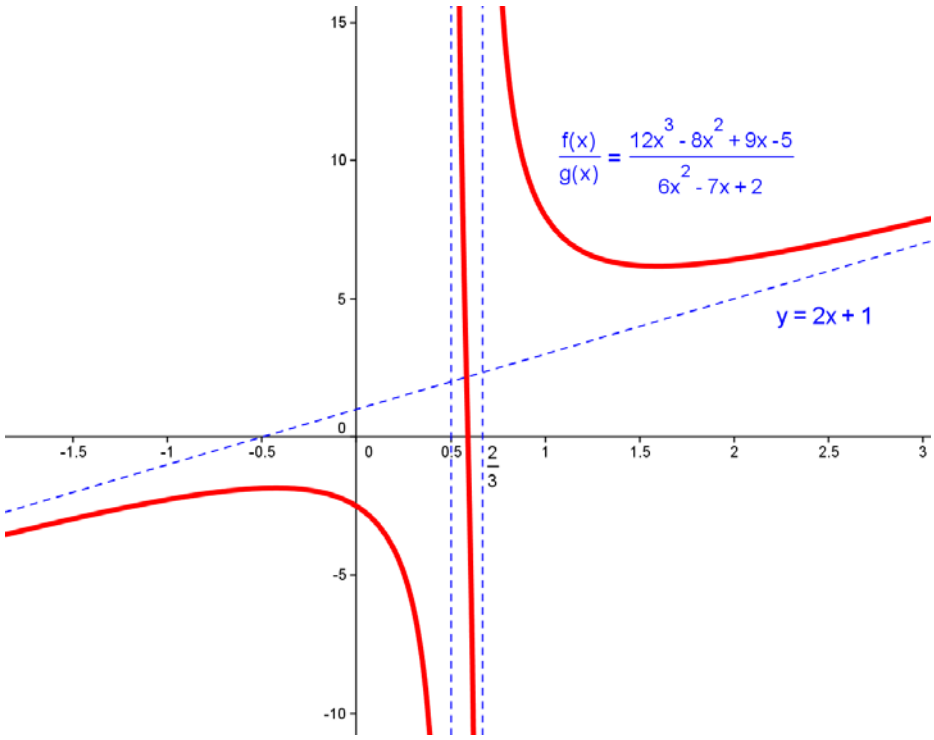
Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el polinomio numerador es un grado mayor que el polinomio denominador.

La ecuación general de una asíntota oblicua es $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^3}{6x^3}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{6x^2}=1$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y=2x+1$



b) $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=\int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx$

Dividiendo entre sí los polinomios se obtiene por la regla de la división:

$$H(x)=\int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int (2x+1)\,dx+\int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx$$

$$H(x)=x^2+x+\ln\left|6x^2-7x+2\right|+k$$

$$H(1)=1 \qquad 1^2+1+\ln 1+k=1 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

$$H(x)=x^2+x+\ln\left|6x^2-7x+2\right|-1$$

Problema 3.2

a) Al ser paralelas al eje de abscisas quiere decir que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ valen cero, o lo que es igual $f'(2)=0$ y $f'(4)=0$.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \qquad f'(2)=12+4a+b=0 \qquad f'(4)=48+8a+b=0$$

$$\left.\begin{array}{r}12+4a+b=0\\ 48+8a+b=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=-9\\ b=24\end{array}\right.$$

b) El punto de inflexión se produce cuando se anula la segunda derivada.

$$f(x)=x^3-9x^2+24x+c \qquad f'(x)=3x^2-18x+24 \qquad f''(x)=6x-18=0 \Rightarrow x=3$$

Al estar sobre el eje OX el punto es el $(3,0)$ lo que significa que $f(3)=0$.

$$27-81+72+c=0 \Rightarrow c=-18$$

Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 4.1

a) El valor de la venta de la producción diaria es $f(x)=100x+250\cdot\frac{40-5x}{10-x}$

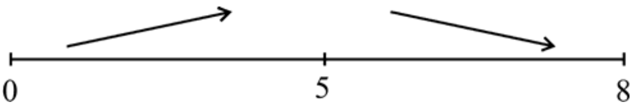
$$f'(x)=100+250\cdot\frac{-10}{(10-x)^2}=100-\frac{2500}{(10-x)^2}=0 \qquad \frac{100(10-x)^2-2500}{(10-x)^2}=0$$

$$100(10-x)^2-2500=0 \qquad (10-x)^2=25 \qquad 10-x=\pm 5 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=5 \\ x=15 \end{cases}$$

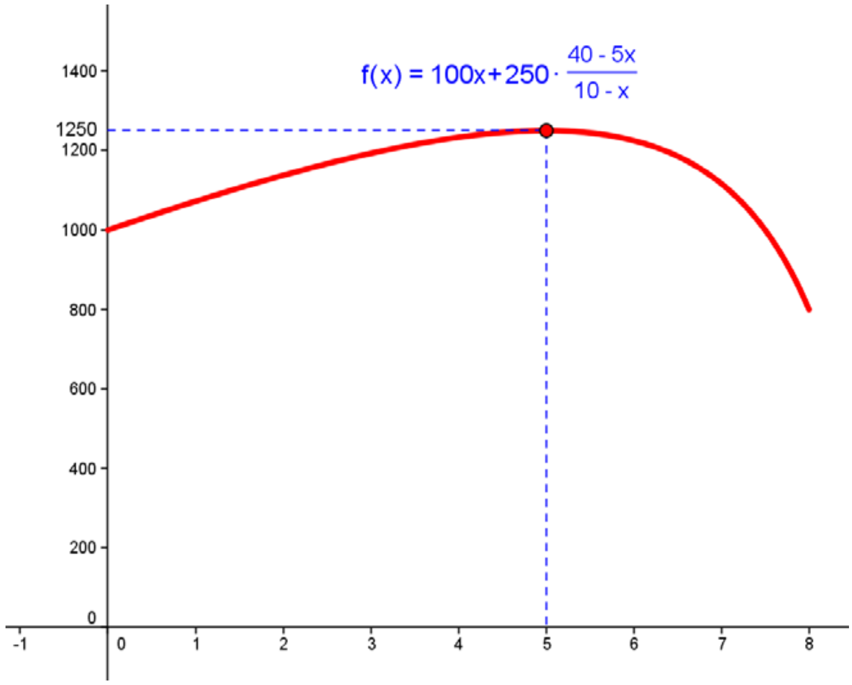
Como la producción máxima diaria de acero de baja calidad es 8 la solución 15 no es válida.

$f'(1)>0$

$f'(6)<0$



Del estudio de la monotonía se deduce que en $x=5$ hay un máximo, por tanto se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de la venta de la producción diaria sea máxima.



Problema 4.2

Como la parábola está centrada en el eje de ordenadas la base del rectángulo será 2x y la altura y. El área es $A=2xy$

Como el cartel tiene los otros dos vértices situados sobre la parábola tiene que verificar su ecuación $y=12-x^2$. Sustituyendo en la fórmula del área se obtiene:

$$A=2x(12-x^2)=24x-2x^3 \qquad A'(x)=24-6x^2=0 \;\Rightarrow\; x=2$$

$$A''(x)=-12x \qquad A''(2)=-24<0 \;\Rightarrow\; \text{En } x=2 \text{ hay un máximo relativo.}$$

Dado que $12-x^2=0 \qquad x=\pm 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 0\le x\le 2\sqrt{3}$ es el dominio de la función.

Sustituyendo en $A(x)=24x-2x^3$ los valores de $x=0$, $x=2$ y $x=2\sqrt{3}$ obtenemos $A(0)=0$

$A(2)=8 \quad A(2\sqrt{3})=0$ por lo que en $x=2$ hay un máximo absoluto siendo $y=12-4=8$

Las dimensiones del cartel de área máxima son 4 u.l. de base y 8 u.l. de altura.