Junio 2006 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología.

1)

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de los coeficientes de las incógnitas del sistema es cero no lo podemos discutir por Cramer.

Vamos a discutir el sistema por el Teorema de Rouché Fröbenius.

Sea A la matriz de los coeficientes del sistema y A^* la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de A empezamos calculando un menor de orden 2 distinto de cero. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$. Por tanto, como $|A| = 0$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, es decir $rgA = 2$.

Para calcular el rango de A^* orlamos el menor anterior con la tercera fila y la cuarta columna correspondiente a los términos independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 10\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

Si $\alpha = 1 \;\Rightarrow\; rgA = 2 = rgA^* < 3$ nº de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

Si $\alpha \neq 1 \;\Rightarrow\; rgA = 2$ y $rgA^* = 3$. El sistema es incompatible.

b) Para $\alpha = 1$ el sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{array}\right\}$

Dado que el menor de orden 2 lo hemos obtenido de las dos primeras ecuaciones, eliminamos la tercera ya que es una combinación lineal de las dos primeras. En el sistema resultante pasamos z al segundo miembro y resolvemos el sistema resultante.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 2 \end{array}\right\} \qquad z = \lambda \qquad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 + 3\lambda \\ 2x + 6y = 2 + 11\lambda \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = \dfrac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

El conjunto de soluciones viene dado por la terna $\left(1-2\lambda,\frac{5}{2}\lambda,\lambda\right)$. Hay infinitas soluciones que se obtienen para los infinitos valore de λ.

c) Para $\alpha=1$, como la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, quiere decir que los tres planos se cortan a lo largo de una misma recta.

A la misma conclusión se llega observando la proporcionalidad entre los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes

$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{6}$ Los planos correspondientes a las dos primeras ecuaciones se cortan.

$\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-2}$ Los planos correspondientes a la primera y tercera ecuaciones se cortan.

$\frac{2}{1}\neq\frac{6}{-2}$ Los planos correspondientes a la segunda y tercera ecuaciones se cortan.

Para $\alpha\neq 1$ el sistema es incompatible. Si efectuamos el mismo proceso que antes obtenemos que los planos se cortan dos a dos. Como el sistema es incompatible la única posibilidad de que los planos se corten dos a dos es que se corten según tres rectas distintas.

2)

a) <u>Recta r</u> Para obtener las ecuaciones paramétricas resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{l}x+y-z=5\\2x+y-2z=2\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z=5\\2x+y-2z=2\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x+y=5+\lambda\\2x+y=2+2\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-3+\lambda\\y=8\\z=\lambda\end{array}\right.$$

<u>Recta s</u> $\overrightarrow{PQ}=(2,2,1) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}x=3+2\mu\\y=10+2\mu\\z=5+\mu\end{array}\right.$

b) Para calcular el punto H de intersección de r y s igualamos las dos ecuaciones y calculamos los valores de λ y μ.

$$\left.\begin{array}{l}-3+\lambda=3+2\mu\\8=10+2\mu\\\lambda=5+\mu\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\mu=-1$ que sustituida en la tercera nos da $\lambda=4$.

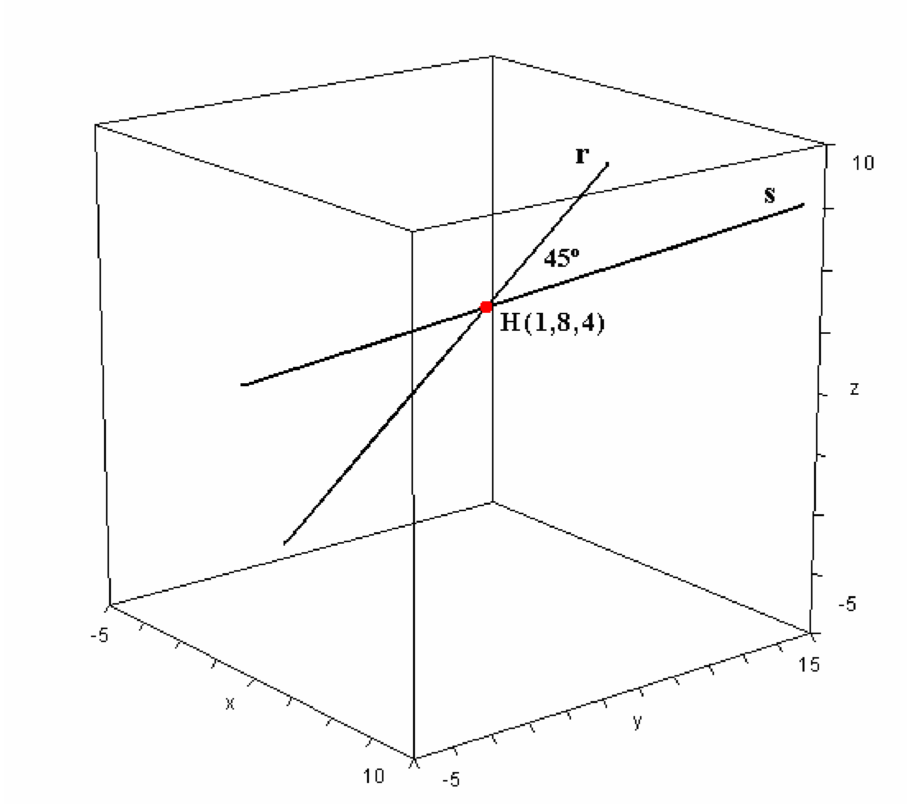
Sustituyendo estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones paramétricas obtenemos las coordenadas del punto H.

$$\begin{cases} x=-3+4=1 \\ y=8 \\ z=4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H(1,8,4)$$

El ángulo que forman r y s es el ángulo que forman sus vectores de dirección.

Vector de dirección de r $\rightarrow$ $\vec{u}=(1,0,1)$. Vector de dirección de s $\rightarrow$ $\vec{v}=(2,2,1)$

$$\alpha=\arccos\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\arccos\frac{\left|(1,0,1)\cdot(2,2,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1}}=\arccos\frac{3}{3\sqrt{2}}=45^{\circ}$$



c) El área del triángulo PQM viene dada por la expresión $A=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right|}{2}=3$, ya que $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right|$ es el área del paralelogramo de lados PQ y PM, por tanto $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right|=6$.

Como M pertenece a la recta r sus coordenadas tienen que verificar la ecuación de la recta, por tanto $M(-3+\lambda,8,\lambda)$.

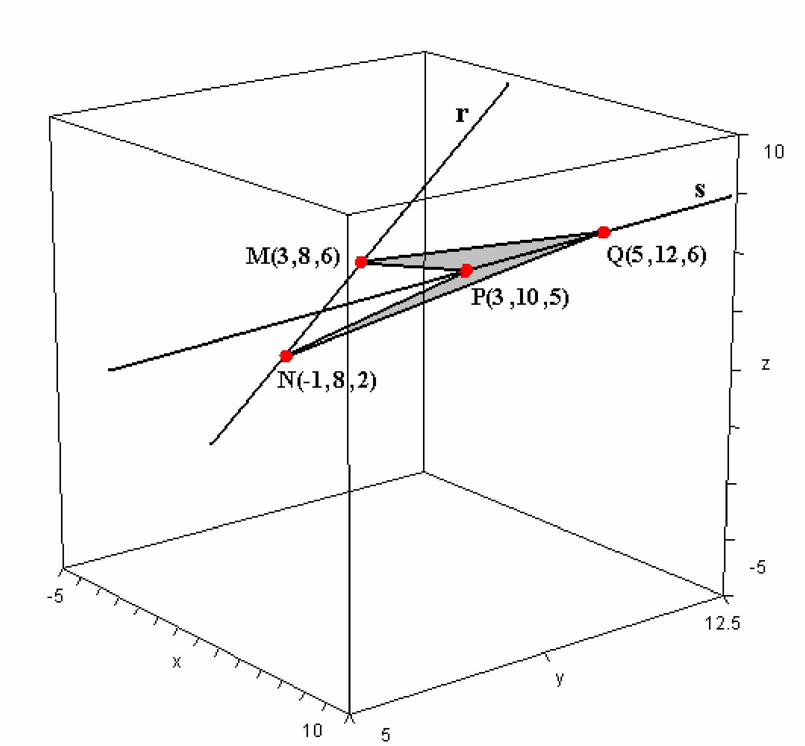
$$\overrightarrow{PQ}=(2,2,1) \qquad \overrightarrow{PM}=(-3+\lambda-3,8-10,\lambda-5)=(-6+\lambda,-2,\lambda-5)$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -6+\lambda & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(2\lambda-8)\vec{i}+(4-\lambda)\vec{j}+(8-2\lambda)\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(2\lambda-8)^2+(4-\lambda)^2+(8-2\lambda)^2} = 6$$

$$9\lambda^2-72\lambda+144=36 \qquad 9\lambda^2-72\lambda+108=0 \quad \Rightarrow \begin{cases}\lambda=6\\ \lambda=2\end{cases}$$

$$\lambda=6 \quad \Rightarrow \quad M(3,8,6) \qquad \lambda=2 \quad \to \quad N(-1,8,2)$$



3)

a) El dominio de la función es $\forall x \in [-1,4]$

Cortes con el eje de abscisas: $x^2-4=0 \qquad x=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}(2,0)\\(-2,0)\end{cases}$

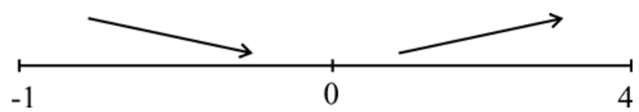
Corte con el eje de ordenadas: $x=0 \quad y=-4 \quad \Rightarrow \quad (0,-4)$

$g(x)=g(-x) \quad \Rightarrow$ La función es simétrica respecto del eje de ordenadas

$$g'(x)=2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

$g'(-0'5)<0$

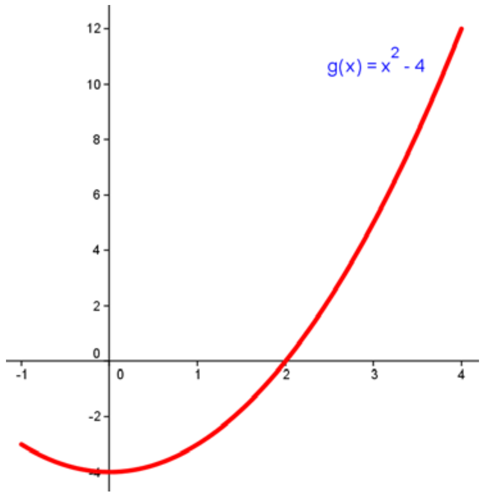
$g'(-2)>0$



Creciente $\forall x \in]0,4[$ Decreciente $\forall x \in]-1,0[$

$g''(x)=2>0 \quad \Rightarrow$ En $(0,-4)$ hay un mínimo

Al ser la segunda derivada siempre positiva la función es cóncava.



b) <u>Método 1</u>

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & \text{si} \quad -1\le x<2 \\ x^2-4 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad -1<x<2 \\ 2x & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x=2$ ya que:

$$f(2)=2^2-4=0 \qquad \lim_{x\to 2^-}(-x^2+4)=0 \qquad \lim_{x\to 2^+}(x^2-4)=0$$

$f(x)$ no es derivable en $x=2$ ya que $\begin{cases} f'_-(2)=-4 \\ f'_+(2)=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \nexists f'(2)$

Estudiamos los máximos y mínimos relativos: $-2x=0 \Rightarrow x=0 \qquad 2x=0 \Rightarrow x=0$

$f''(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1<x<2 \\ 2 & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases} \rightarrow \quad f''(0)=-2<0 \Rightarrow$ en $x=0$ hay un máximo relativo.

Calculamos los valores que toma la función en los extremos del intervalo $\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(4)=12 \end{cases}$

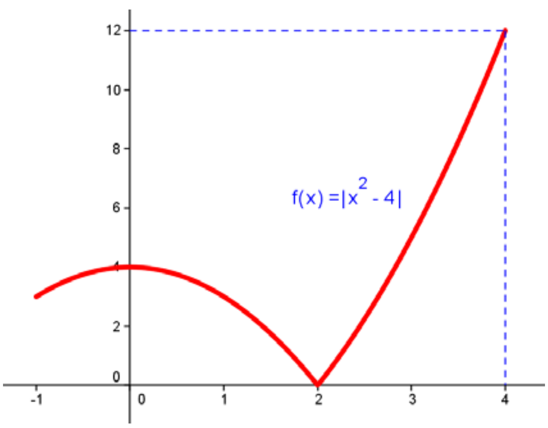
Comparamos todas las ordenadas de los valores obtenidos anteriormente.

$$f(-1)=3 \qquad f(4)=12$$

$$f(0)=4 \qquad f(2)=0$$

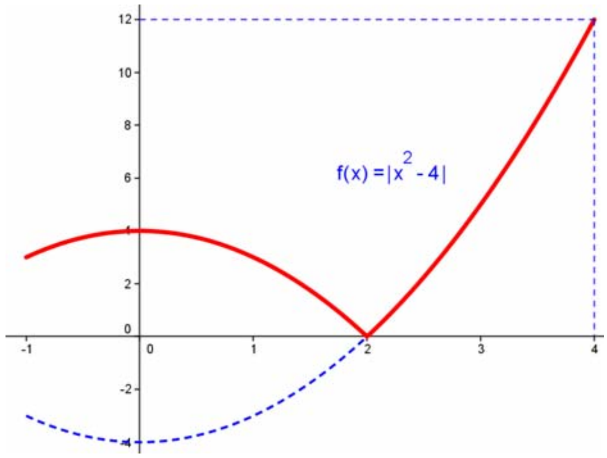
En $(2,0)$ hay un mínimo absoluto.

En $(4,12)$ hay un máximo absoluto.



Método 2

Representamos gráficamente la función $f(x)=x^2-4$ y el "trozo" de gráfica que se encuentra por debajo del eje de abscisas lo dibujamos por simetría por encima del eje de abscisas. De la gráfica se deduce el mínimo y el máximo absolutos.



En $(2,0)$ hay un mínimo absoluto.

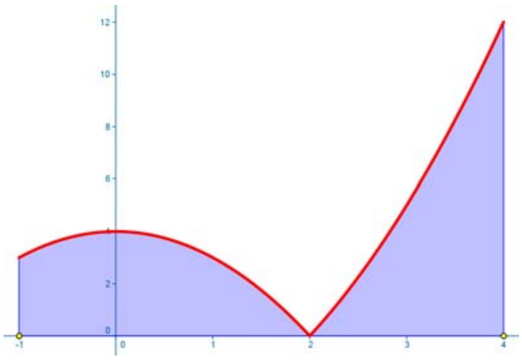
En $(4,12)$ hay un máximo absoluto.

c)

$$A=\int_{-1}^{2}(-x^2+4)\,dx+\int_{2}^{4}(x^2-4)\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

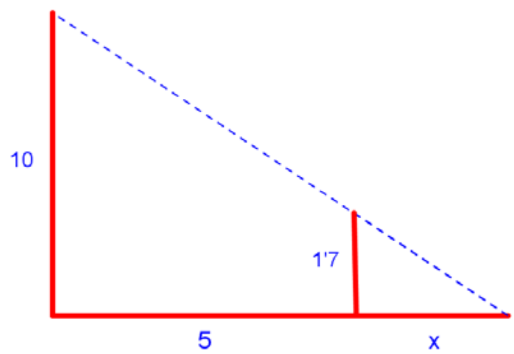
$$-\frac{8}{3}+8-\left(\frac{1}{3}-4\right)+\frac{64}{3}-16-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{59}{3}\ u^2$$



4)

a)

De la figura de la derecha y por semejanza de triángulos calculamos la longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m. de la base del farol.

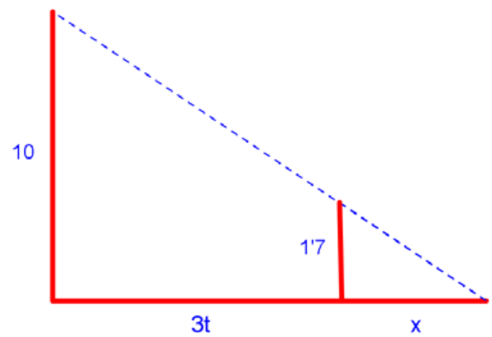


$$\frac{10}{5+x}=\frac{1'7}{x} \qquad 10x=8'5+1'7x$$

$$8'3x=8'5 \quad \Rightarrow \quad x=1'02\,m$$

b)

Como el hombre camina a una velocidad constante de 3 m/s, al cabo de t segundos el espacio recorrido es de: $e=vt=3t$



$$\frac{10}{3t+x}=\frac{1'7}{x} \qquad 10x=5'1t+1'7x$$

$$8'3x=5'1t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5'1}{8'3}t=0'6144t$$

La velocidad de crecimiento de la sombra al cabo de t segundos es: $v=\frac{dx}{dt}=0'61\ m/seg$

1)

a) $T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |T|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Como el determinante de la matriz T es distinto de cero quiere decir que dicha matriz admite inversa.

$$(\mathrm{AdjT})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{AdjT})^t=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}=\frac{(\mathrm{AdjT})^t}{|T|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A=T^{-1}BT \qquad TAT^{-1}=TT^{-1}BTT^{-1} \qquad TAT^{-1}=IBI=B$

La manera más fácil de calcular el determinante de la matriz B es aplicar la propiedad del determinante de un producto de matrices.

$$|B|=|TAT^{-1}|=|T|\cdot|A|\cdot|T^{-1}|=|T|\cdot|T^{-1}|\cdot|A|$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2 \qquad T\cdot T^{-1}=I \qquad |T\cdot T^{-1}|=|T|\cdot|T^{-1}|=|I|=1$$

$$|B|=|I|\cdot|A|=1\cdot 2=2$$

Otra manera de calcular el determinante de la matriz B es calculando el producto entre las matrices TAT^{-1} y finalmente calculando el determinante de la matriz resultante.

$$T\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=(TA)\cdot T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2$$

c) Los elementos de la matriz B son $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

2)

a) Las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$P\left(\frac{4+2}{2},\frac{-4+0}{2},\frac{9+5}{2}\right)=P(3,-2,7)$$

La distancia de C a P es: $d=\sqrt{(3-4)^2+(-2-2)^2+(7-6)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}\,u$

El área S del triángulo de vértices A, B y C es: $A=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$

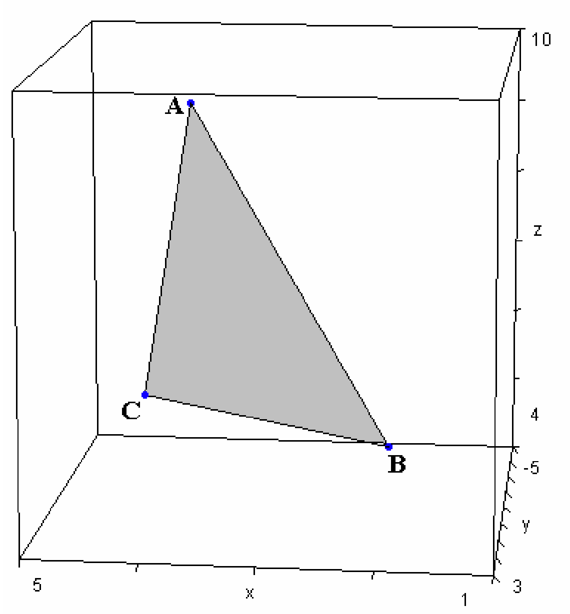
$$\overrightarrow{AB}=(-2,4,-4)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0,6,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&4&-4\\0&6&-3\end{vmatrix}=12\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{12^2+(-6)^2+(-12)^2}=18$$

$$A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{18}{2}=9u^2$$



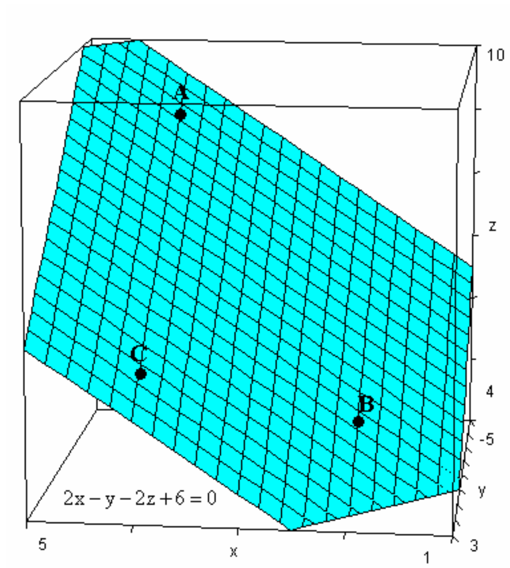
b)

Para calcular la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y C utilizamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ calculados anteriormente.

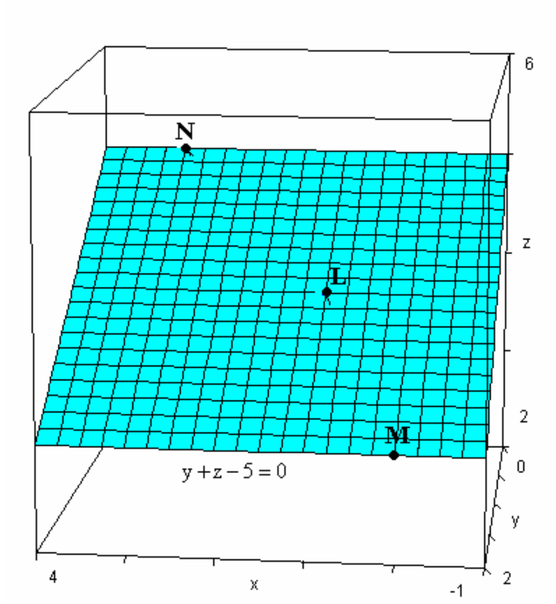
$$\begin{vmatrix}x-4&y+4&z-9\\-2&4&-4\\0&6&-3\end{vmatrix}=0$$

$$12x-6y-12z+36=0$$

$$2x-y-2z+6=0$$



Para calcular la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos L, M y N tenemos que calcular los vectores $\overrightarrow{LM}$ y $\overrightarrow{LN}$.



$$\overrightarrow{LM}=(-1,1,-1) \qquad \overrightarrow{LN}=(2,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-y-z+5=0$$

$$y+z-5=0$$

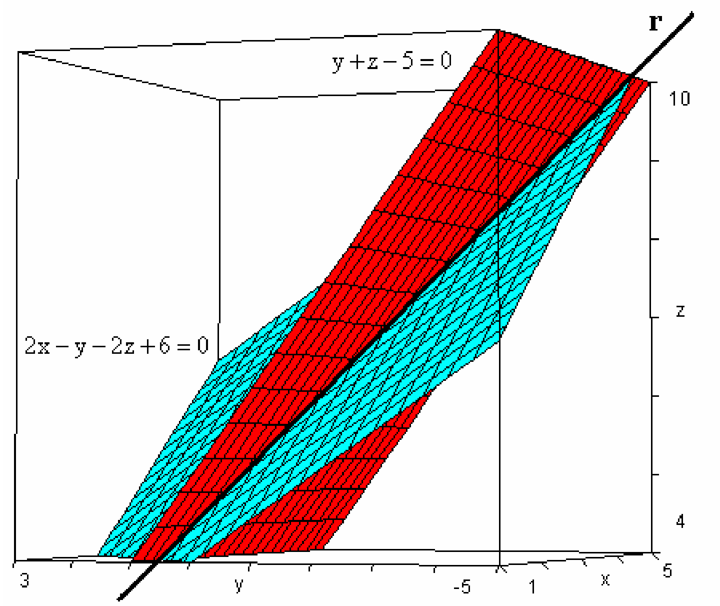
c) Las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos π y π' se obtienen resolvemos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de los dos planos.

$$\left.\begin{matrix} 2x-y-2z+6=0 \\ y+z-5=0 \end{matrix}\right\} \qquad z=\lambda \qquad \left.\begin{matrix} 2x-y=-6+2\lambda \\ y=5-\lambda \end{matrix}\right\} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

El ángulo α formado por los dos planos es el mismo que el formado por sus vectores característicos.

$$\vec{n}=(2,-1,-2) \qquad \vec{n'}=(0,1,1)$$

$$\alpha=\arccos\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=\arccos\frac{\left|(2,-1,-2)\cdot(0,1,1)\right|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{0+1+1}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{18}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^{\circ}$$



3)

a) Veamos que la función cumple los tres apartados del Teorema del Valor Medio o de Lagrange.

1) $f(x)=\ln x$ es continua en el intervalo cerrado $[1,e]$.

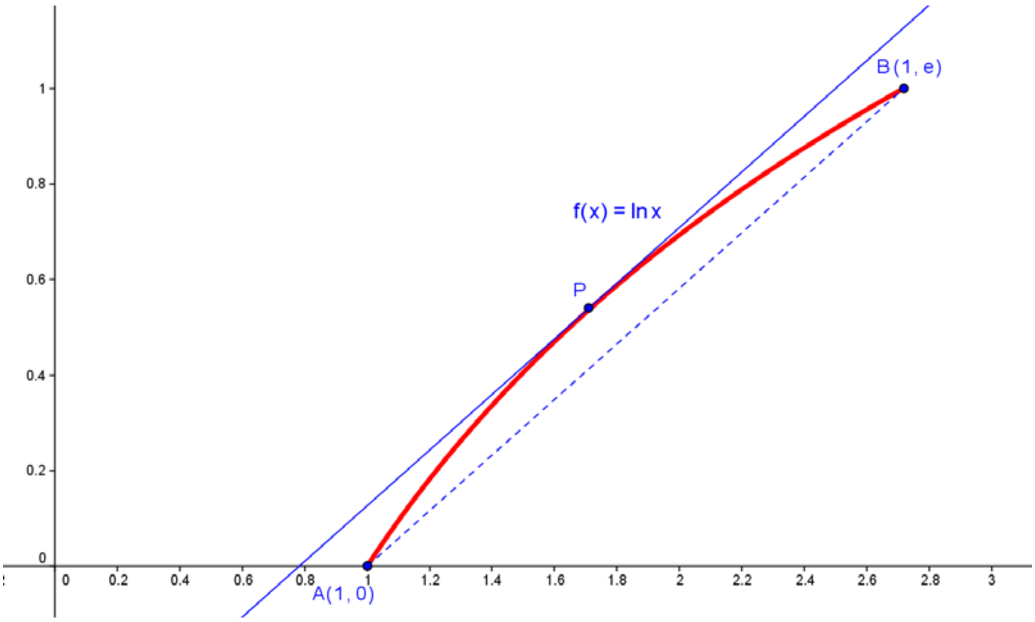
2) $f(x)=\ln x$ es derivable en el intervalo abierto $]1,e[$.

3) Existe un punto c interior a dicho intervalo en el que se verifica: $f'(c)=\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}$, donde la expresión $\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}$ representa la pendiente de la recta secante a la curva de ecuación $f(x)=\ln x$ que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(e,1)$ y $f'(c)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\ln x$ en el punto de abscisa c.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(c)=\dfrac{1}{c} \qquad \dfrac{1}{c}=\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=\dfrac{\ln e-\ln 1}{e-1}=\dfrac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad c=e-1=1'7182...$

El punto P tiene de coordenadas: $P\big(e-1, f(e-1)\big)=P(1'71, 0'54)$

c) $m=f'(e-1)=\dfrac{1}{e-1}=0'5819$



4)

a) Sea x la longitud del lado vertical e y la longitud del lado horizontal. El coste del marco de la ventana viene dado por la fórmula:

$$C=12'5\cdot 2x+8\cdot 2y=25x+16y$$

Sabemos que la superficie de la ventana es $1\,m^2 \quad \Rightarrow \quad 1=xy \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{1}{x}$

Sustituyendo en la expresión del coste y derivando obtenemos:

$$C = 25x + \frac{16}{x} \qquad C'(x) = 25 - \frac{16}{x^2} = 0 \qquad 25x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 0'8\,m$$

$$C''(x) = \frac{32}{x^3} \qquad C''(0'8) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } x = 0'8 \text{ hay un mínimo}$$

Las dimensiones para que el coste sea mínimo son $x = 0'8\,m$ e $y = \frac{1}{0'8} = 1'25\,m$

b) El coste mínimo es $C = 25 \cdot 0'8 + 16 \cdot 1'25 = 40\,€$