Junio 2005 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología.

1)

$$\begin{cases} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{cases} \qquad \begin{cases} 2AX-3AY=B \\ -2AX+2AY=-2C \end{cases} \qquad -AY=B-2C \qquad AY=-B+2C$$

$$A^{-1}AY=A^{-1}(-B+2C) \qquad \Rightarrow \qquad Y=A^{-1}(-B+2C)$$

$$-B+2C=-\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-1 \quad Adj(A)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (Adj\,A)^t=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y=A^{-1}(-B+2C)=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AX-AY=C \qquad AX=C+AY \qquad A^{-1}AX=A^{-1}(C+AY) \qquad X=A^{-1}(C+AY)$$

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

2) Resolvemos los tres sistemas de ecuaciones lineales.

a)

$$\left.\begin{array}{r} y+z-12m=0 \\ x=1 \\ y=z \end{array}\right\} \to \quad z+z-12m=0 \quad \to \quad z=6m \quad \Rightarrow \quad A(1,6m,6m)$$

$$\left.\begin{array}{r} y+z-12m=0 \\ x=2 \\ y=2z \end{array}\right\} \to \quad 2z+z-12m=0 \quad \to \quad z=4m \quad \Rightarrow \quad B(2,8m,4m)$$

$$\left.\begin{array}{r} y+z-12m=0 \\ x=3 \\ y=3z \end{array}\right\} \to \quad 3z+z-12m=0 \quad \to \quad z=3m \quad \Rightarrow \quad C(3,9m,3m)$$

b) $A_T=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=1$ $\qquad \overrightarrow{AB}=B-A=(2,8m,4m)-(1,6m,6m)=(1,2m,-2m)$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(3,9m,3m)-(1,6m,6m)=(2,3m,-3m)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2m & -2m\\ 2 & 3m & -3m\end{vmatrix}=-m\,\vec{j}-m\,\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{m^2+m^2}=\sqrt{2m^2}=m\sqrt{2}$$

$$A_T=\frac{m\sqrt{2}}{2}=1 \qquad m\sqrt{2}=2 \qquad 2m^2=4 \qquad m^2=2 \qquad m=\sqrt{2}$$

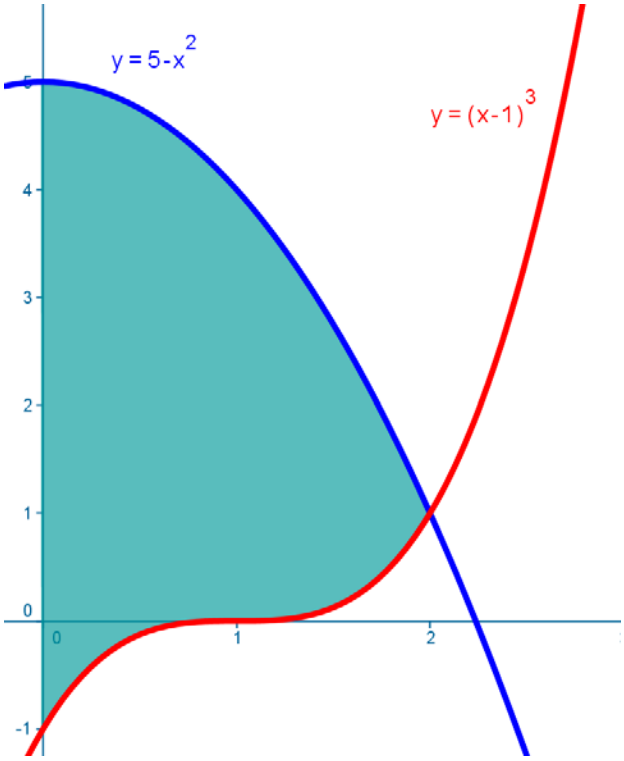
3)

a)

$$\left.\begin{array}{l} y=(x-1)^3 \\ y=5-x^2 \end{array}\right\} \qquad (x-1)^3=5-x^2 \qquad x^3-3x^2+3x-1=5-x^2 \qquad x^3-2x^2+3x-6=0$$

$$x=2 \;\rightarrow\; y=1 \;\Rightarrow\; (2,1)$$

b) Nos piden calcular el área del siguiente recinto:



El problema del cálculo del área lo podemos plantear de tres maneras:

- Si interpretamos el problema tomando la variable “x” como independiente y la variable “y” como dependiente el área pedida es:

$$A=\left|\int_0^2 (5-x^2)\,dx\right|-\left|\int_0^2 (x-1)^3\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2\right|-\left|\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^2\right|=\left|\frac{22}{3}\right|-|0|=\frac{22}{3}-0=7'33\ u^2$$

También podemos calcularla como el área comprendida entre las gráficas de dos funciones.

$$A = \left| \int_0^2 \left[(5-x^2)-(x-1)^3\right]dx \right| = \left| \left[5x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^2 = \frac{22}{3} = 7'33\ u^2 \right|$$

- Si interpretamos el problema tomando la variable "x" como dependiente y la variable "y" como independiente el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(1+\sqrt[3]{y}\right)dy + \int_1^5 \sqrt{5-y}\ dy$$

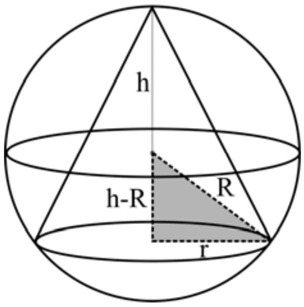
donde los puntos de corte con el eje de ordenadas de las dos curvas son $(0,5)$ y $(0,-1)$ y las funciones correspondientes viene dadas por las expresiones:

$$y=(x-1)^3 \ \rightarrow\ x-1=\sqrt[3]{y} \ \rightarrow\ x=1+\sqrt[3]{y} \qquad y=5-x^2 \ \rightarrow\ x=\sqrt{5-y}$$

4.1) $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Calculamos el cono de volumen máximo que podemos introducir en una esfera. La relación entre el radio del cono y el radio de la esfera viene dada por el Tª de Pitágoras:

$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 \qquad r^2 = R^2 - (h-R)^2$$



$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left[R^2-(h-R)^2\right]h = \frac{1}{3}\pi\left[R^2-h^2+2hR-R^2\right]h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[-h^3+2h^2R\right] \qquad V' = \frac{1}{3}\pi(-3h^2+4hR)=0$$

$$-3h^2+4hR=0 \qquad h(-3h+4R)=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} h=0 \\ h=\frac{4}{3}R \end{cases}$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{4}{3}R-R\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{8}{9}R^2$$

El volumen máximo del cono es $\quad V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{8}{9}R^2 \cdot \frac{4}{3}R = \frac{32}{81}\pi R^3$

La razón entre el volumen máximo del cono y el volumen de la esfera es:

$$\frac{V_{cono}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{32}{81}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{32\cdot 3}{81\cdot 4} = 0'2962 = 29'62\% < 30\%$$

por tanto, el volumen del cono siempre es menor que el 30% del volumen de la esfera.

4.2)

a) Sabemos que $\overline{x}=9'2$ $\quad \overline{y}=7'5$ $\quad r=0'7$ y $\quad \sigma_y=2\sigma_x$

$$r=0'7=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y} \qquad \sigma_{xy}=0'7\cdot\sigma_x\sigma_y=0'7\cdot\sigma_x 2\sigma_x=1'4\sigma_x^2$$

$$y-\overline{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\overline{x}) \qquad y-7'5=\frac{1'4\sigma_x^2}{\sigma_x^2}(x-9'2) \quad \rightarrow \quad y=1'4x-5'38$$

$$x-\overline{x}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\overline{y}) \qquad x-9'2=\frac{1'4\sigma_x^2}{4\sigma_x^2}(y-7'5) \quad \rightarrow \quad x=0'35y+6'575$$

b) $y(6)=1'4\cdot 6-5'38=3'02$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \alpha^2(\alpha-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

- Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ S.C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{0}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha(-\alpha^2+2\alpha-1)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\left(0, \frac{\alpha+1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\right)$$

- Si $\alpha = 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{cases} \text{rg}\, A = 1 \\ \text{rg}\, A^* = 2 \end{cases} \qquad \text{S.I.}$$

- Si $\alpha = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \text{rg}\, A = 1 \\ \text{rg}\, A^* = 1 \end{cases} \qquad \text{S.C.I.}$$

$$x + y + z = 1 \quad \to \quad \begin{cases} z = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda-\mu, \mu, \lambda)$$

2) Como las proyecciones desde el origen al plano son perpendiculares y los puntos que componen esas proyecciones pertenecen a la recta dada, quiere decir que los puntos de los planos que son proyecciones del origen verifican la ecuación de la recta y además el vector que va desde el origen a cualquier punto de los proyectados sobre los planos son vectores característicos de dichos planos.

Sea P un punto de los proyectados sobre el plano. Por pertenecer a la recta sus coordenadas son $P(t,4,1)$ ya que las ecuaciones de la recta en paramétricas son: $x=t \quad y=4 \quad z=1$. Por otra parte el vector $\vec{OP}$ es un vector característico del plano y sus coordenadas son: $\vec{OP}=(t,4,1)$.

La ecuación del plano es por tanto: $Ax+By+Cz+D=0 \quad \rightarrow \quad tx+4y+z+D=0$

Como el punto $(-7,2,-3)$ pertenece al plano, verifica su ecuación.

$$-7t+8-3+D=0 \;\rightarrow\; D=-5+7t \quad \Rightarrow \quad tx+4y+z-5+7t=0$$

Para cada valor de t hay un plano que pasa por el punto $(-7,2,-3)$ y tal que la proyección del origen sobre él pertenece a la recta dada.

3) Continuidad en $x=0$

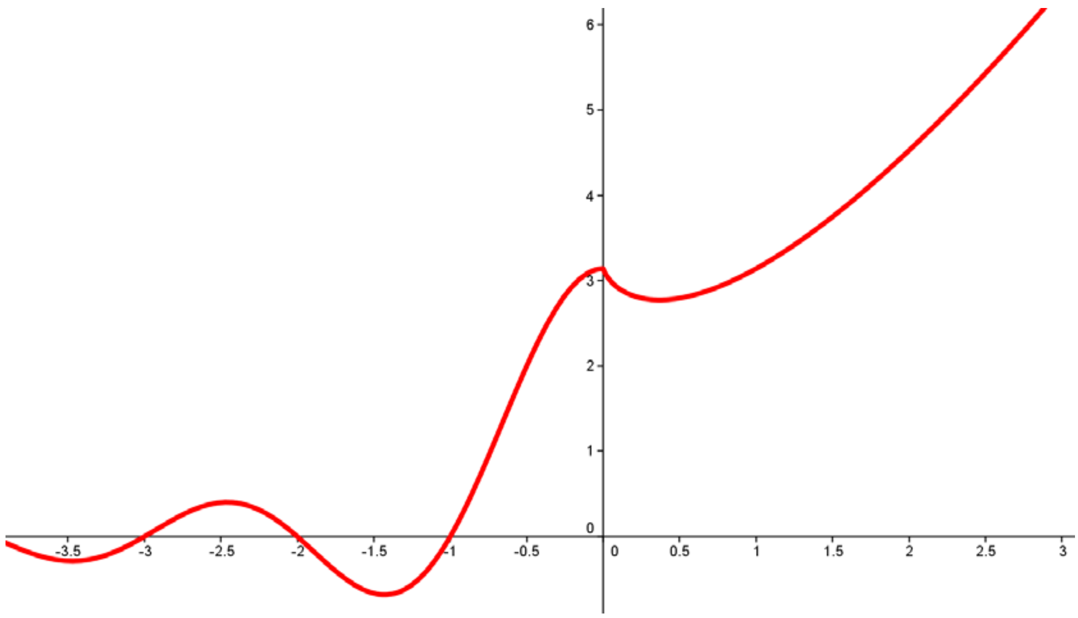
a) $f(0)=b$

b) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{x} = \dfrac{0}{0}\,(\text{L´Hopital}) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\pi\cos\pi x}{1} = \pi \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot\ln x + a) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} + a \right) = \dfrac{\infty}{\infty}\,(\text{L´Hopital}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} + a \right) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x+a) = a \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ para que la función sea continua en $x=0$ entonces

$$a=\pi=b$$

Para estos valores de a y b la gráfica es:



4.1)

a) Calculamos los valores de t para los cuales la concentración en sangre del fármaco ya no actúa.

$$C(t) = 0'29483t + 0'04253t^2 - 0'00035t^3$$

$$C(t) = 0 \qquad 0'29483t + 0'04253t^2 - 0'00035t^3 = 0 \qquad t\,(0'29483 + 0'04253t - 0'00035t^2) = 0$$

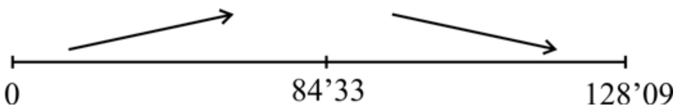
$$t = -6'57 \qquad t = 0 \qquad t = 128'09 \qquad \forall t \in \left]0, 128'09\right[$$

b) $C'(t) = 0'29483 + 0'08506t - 0'00105t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = -3'29 \\ t = 84'33 \end{cases}$

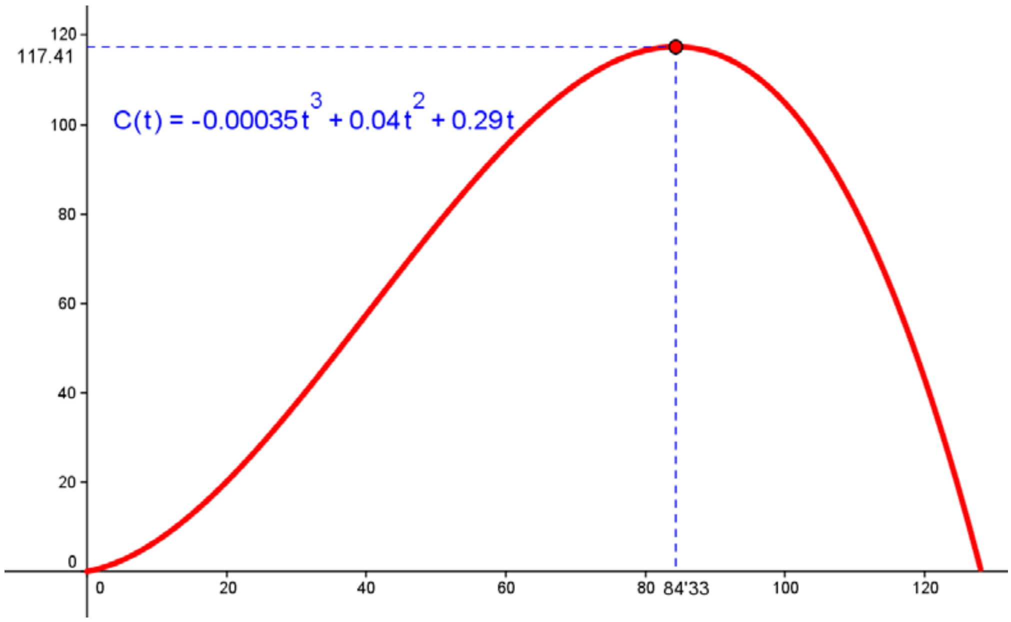
Comprobamos que es un máximo estudiando la monotonía.

$C'(1) = 0'37 > 0$

$C'(90) = -0'55 < 0$



Por tanto, la concentración es máxima a los $84'33$ minutos como se observa en la siguiente gráfica y su valor es de $117'41$ mg/ml.



4.2)

a) $p(\text{al menos una blanca sea}) = \dfrac{29}{30} = 0'9\widehat{6}$

$p(\text{al menos una blanca}) = 1 - (\text{probabilidad de ninguna blanca})$

$$p(B) = \frac{6}{10} \qquad p(N) = \frac{4}{10}$$

Si se extrae una bola solamente: $p(\text{al menos una blanca}) = 1 - \dfrac{4}{10} = \dfrac{6}{10} = 0'6$

Si se extraen dos bolas: $p(\text{al menos una blanca}) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{78}{90} = 0'8\widehat{6}$

Si se extraen tres bolas: $p(\text{al menos una blanca}) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{696}{720} = 0'9\widehat{6}$

Se deberán extraer 3 bolas.

b) Para que la probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 es necesario sacar 5 bolas ya que sacando 4 o menos de 4 siempre cabe la posibilidad de sacar alguna negra.