Junio 2004 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología

1)

a) Calculamos el valor del determinante de los coeficientes del sistema.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \qquad (\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Sean A la matriz de los coeficientes del sistema y A^* la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3 \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3$. El sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = -2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -30$$

$\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg} A^* = 3$

Sistema Incompatible

- Si $\lambda = 3$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 < 3$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos el sistema por el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6\lambda & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2(\lambda-3)(2\lambda+1)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2(2\lambda+1)}{\lambda+2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 3\lambda & -1\\ 2 & 6 & -2\end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\frac{2(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda\\ \lambda & 2 & 3\lambda\\ 2 & \lambda & 6\lambda\end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\frac{(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\lambda-2$$

c) Si $\lambda=3$ el sistema equivalente es: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3\\ 3x+2y-z=9\\ 2x+3y-2z=6\end{array}\right\}$

Por Gauss obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & -1 & 9\\ 2 & 3 & -2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 5 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{r} x-y+z=3\\ 5y-4z=0\end{array}\right\}$ Haciendo $z=\lambda$ $\quad y=\frac{4\lambda}{5}$ $\quad x=3+y-z=3+\frac{4\lambda}{5}-\lambda=\frac{15-\lambda}{5}$

Solución: $\left(\frac{15-\lambda}{5},\frac{4\lambda}{5},\lambda\right)$

2)

a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

Recta s

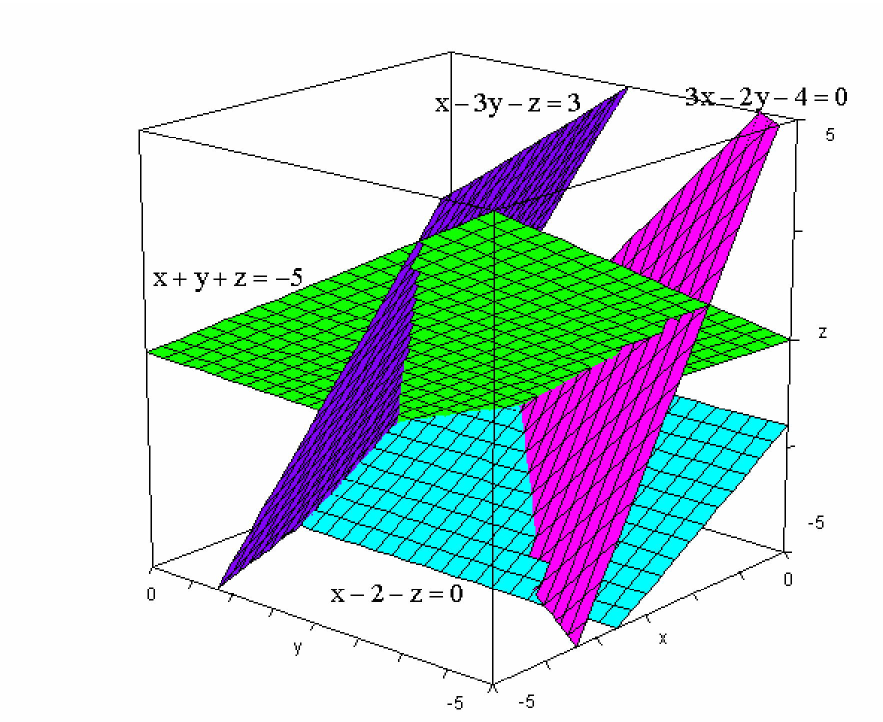
$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-5\\ x-3y-z=3\end{array}\right\}$ $\quad\left.\begin{array}{r} x+y=-5-\lambda\\ x-3y=3+\lambda\end{array}\right\}$ $\quad 4y=-8-2\lambda$ $\quad y=-2-\frac{1}{2}\lambda$ $\quad x=-3-\frac{1}{2}\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} x=-3-\frac{1}{2}\lambda\\ y=-2-\frac{1}{2}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l} x=-3-\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A(-3,-2,0)\\ \vec{u}(-1,-1,2)\end{array}\right.$$

Recta r

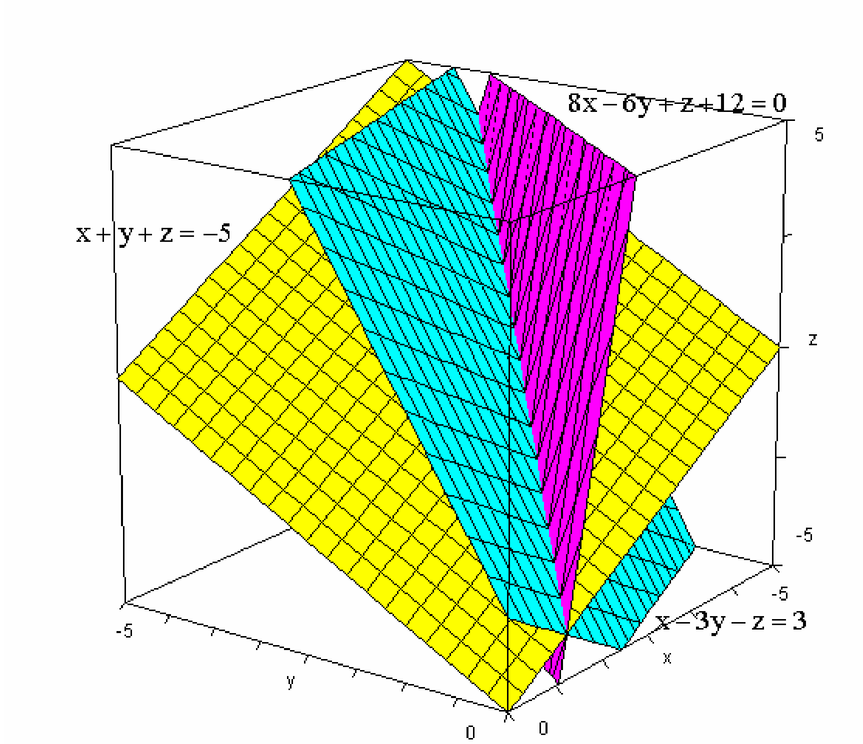
$$\left.\begin{array}{l} x=2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} B(2,1,0)\\ \vec{v}(2,3,2)\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)-(-3,-2,0)=(5,3,0)$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$ Las rectas se cruzan.



b) Un punto del plano es $A(-3,-2,0)$ y dos vectores son $\vec{u}(-1,-1,2)$ y $\vec{v}(2,3,2)$, por tanto su ecuación viene dada por la expresión:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x-6y+z+12=0$$



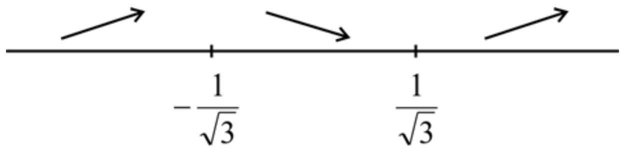
3) La pendiente de la recta tangente a la curva nos la da la derivada de la función $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Para saber si esa pendiente es máxima o mínima calculamos su derivada y estudiamos la monotonía.

$$y'' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

Las soluciones que anulan el numerador son: $6x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$y''(-1) > 0$$
$$y''(0) < 0$$
$$y''(1) > 0$$

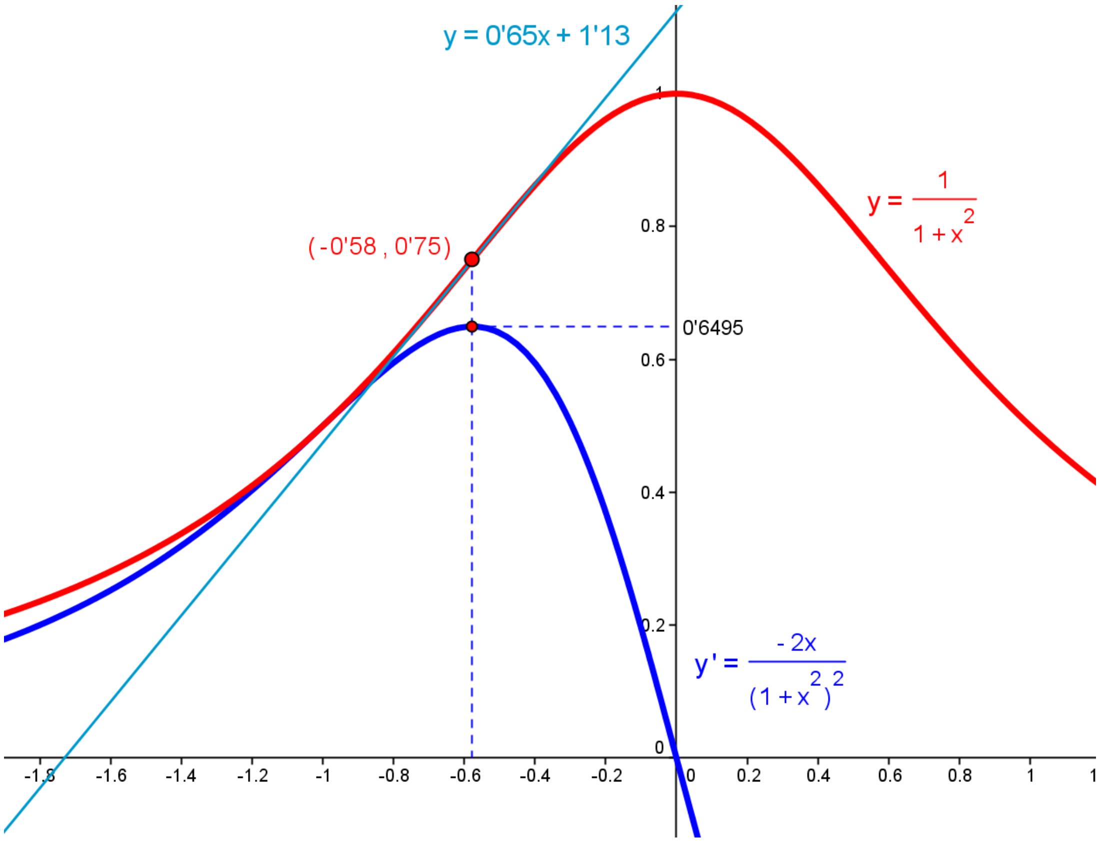


La pendiente es máxima para $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y su valor es de $y'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = 0'6495$

El punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ que tiene la pendiente máxima es:

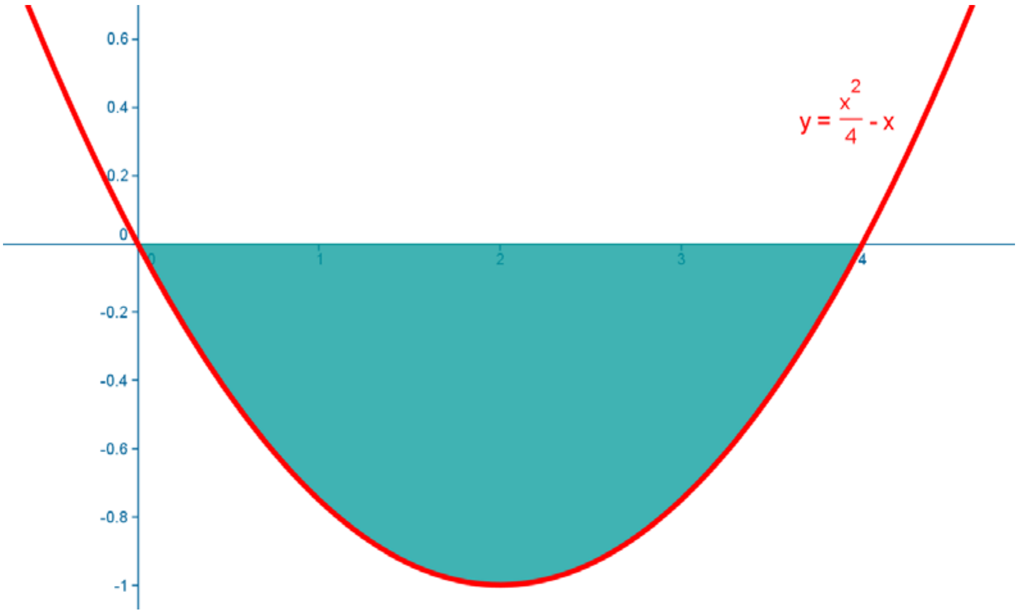
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = (-0'58, 0'75)$$

La ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en ese punto es: $y = 0'65x + 1'13$



4.1) Calculamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\frac{x^2}{4}-x=0 \qquad x^2-4x=0 \qquad x(x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$



El área pedida es:

$$A=\left|\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}-x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4\right|=\left|\frac{64}{12}-8-(0-0)\right|=\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}\,\text{km}^2$$

$$1\text{Ha}=(100\,\text{m})^2=10.000\,\text{m}^2=0'01\text{km}^2$$

Si $0'01\text{km}^2$ se paga a 60 € entonces 1km^2 se pagará a 6000 € y por tanto $\frac{8}{3}\text{km}^2$ se pagarán a

$$6000\cdot\frac{8}{3}=\frac{48.000}{3}=16000\ €$$

4.2) Conocemos los siguientes datos:

$$\bar{x}=\frac{120}{10}=12 \qquad \bar{y}=6'8 \qquad \sigma_x=\sigma_y \qquad r=0'8=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad \sigma_{xy}=0'8\sigma_x^2$$

$$y-6'8=\frac{0'8\sigma_x^2}{\sigma_x^2}(x-12) \quad \rightarrow \quad y=0'8x-2'8$$

1)

$$2B = 2\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 6 & 2 \\ 2(x+1) & 8 & 4 \\ 2x & 2(2-x^2) & 2 \end{pmatrix}$$

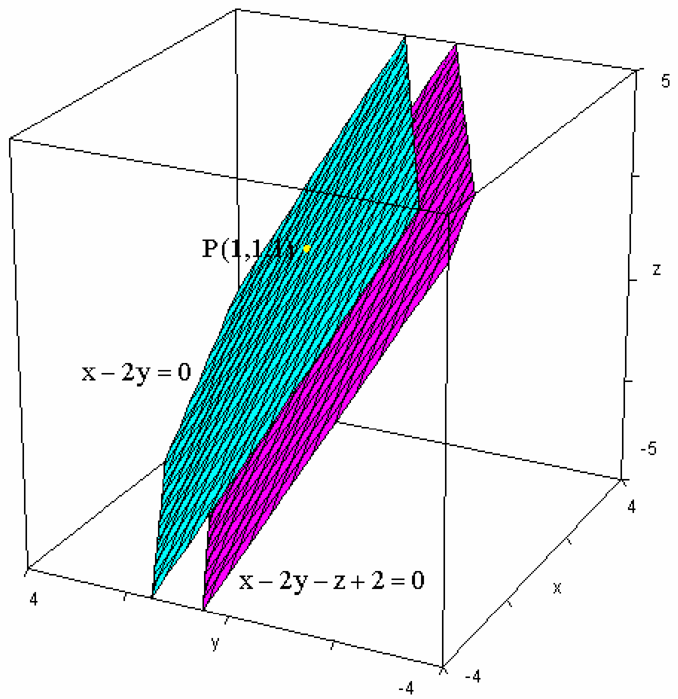
$$|2B| = \begin{vmatrix} 2x & 6 & 2 \\ 2(x+1) & 8 & 4 \\ 2x & 2(2-x^2) & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = 160 \qquad \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \qquad x^3 - x^2 + x - 21 = 0 \qquad (x-3)(x^2+2x+7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

2)

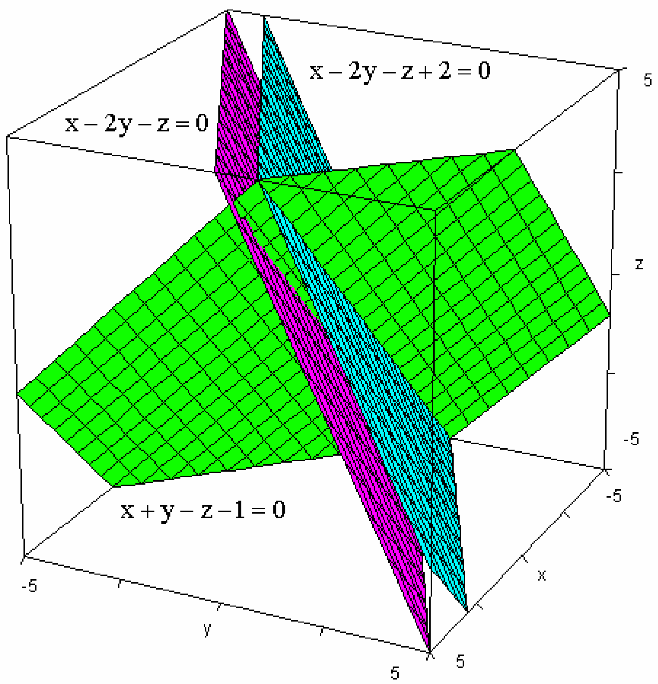
a) El plano π_1 que pasa por P y es paralelo a π tiene como vector característico el mismo que el de π, es decir $\vec{n} = (1,-2,-1)$. La ecuación es: $x - 2y - z + D = 0$.

Como pasa por P se verifica $1 - 2\cdot 1 - 1 + D = 0 \quad D = 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - z + 2 = 0$



b) El plano π_2 viene definido por el punto $A(1,0,0)$ de la recta r y dos vectores. Un vector es $\vec{u} = (1,2,3)$, que es el vector de dirección de la recta r y el otro vector es el que va desde el punto A de la recta r al punto $P(1,1,1)$.

$$\overrightarrow{AP}=(1,1,1)-(1,0,0)=(0,1,1) \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad x+y-z-1=0$$



c) La recta se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos.

$$\left.\begin{matrix} x-2y-z+2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{matrix}\right\} \qquad z=\lambda \qquad \left.\begin{matrix} x-2y=-2+\lambda \\ x+y=1+\lambda \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

3) $x^2-2x-15=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-3 \\ x=5 \end{cases}$

$$\frac{-16}{x^2-2x-15}=\frac{-16}{(x+3)(x-5)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx=\int \frac{2}{x+3}\,dx+\int \frac{-2}{x-5}\,dx=2\ln(x+3)-2\ln(x-5)=\ln\frac{(x+3)^2}{(x-5)^2}$$

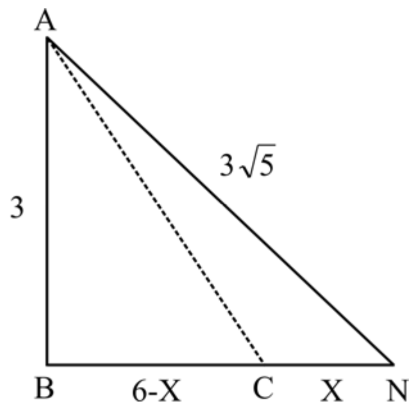
$$\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx=\left[\ln\frac{(x+3)^2}{(x-5)^2}\right]_0^z=\ln\frac{(z+3)^2}{(z-5)^2}-\ln\frac{9}{25}=\ln 25$$

$$\ln\frac{(z+3)^2}{(z-5)^2}=\ln 25+\ln\frac{9}{25}=\ln 25+\ln 9-\ln 25=\ln 9 \qquad \ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2=\ln 9$$

$$\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2=9 \qquad \frac{z+3}{z-5}=\pm 3 \qquad \left.\begin{matrix} z+3=3(z-5) \\ z+3=-3(z-5) \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=3 \\ z=9 \end{cases}$$

4.1)

Aplicando el Tª de Pitágoras al triángulo ABN deducimos que $BN = 6\,km$.



El nadador camina la distancia NC y nada la distancia CA. Si $CN = x$, obtenemos por Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{9+(6-x)^2} = \sqrt{x^2-12x+45}$$

Sabemos que $v = \dfrac{e}{t} \Rightarrow t = \dfrac{e}{v}$

El tiempo empleado en caminar y nadar es: $t = t_c + t_n = \dfrac{x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2-12x+45}}{3}$

Para obtener el menor tiempo posible derivamos la función.

$$t' = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x-12}{2\sqrt{x^2-12x+45}} = 0 \qquad \frac{x-6}{3\sqrt{x^2-12x+45}} = -\frac{1}{5} \qquad 5x-30 = -3\sqrt{x^2-12x+45}$$

$$(5x-30)^2 = \left(-3\sqrt{x^2-12x+45}\right)^2 \qquad 25x^2-300x+900 = 9x^2-108x+405$$

$$16x^2-192x+395 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3'75 \\ x = 8'25 \end{cases}$$

La solución correcta es $x = 3'75$ ya que $8'25$ no es posible por ser x menor que 6 km.

El tiempo mínimo empleado es:

$$t' = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-12x+45}}{3} = \frac{3'75}{5} + \frac{\sqrt{3'75^2-12\cdot 3'75+45}}{3} = 0'75 + 1'25 = 2\,\text{horas}$$

4.2)

a) Tenemos una distribución normal $N(1'70, 0'1)$

$$p(X \le 1'72) = p\left(z \le \frac{1'72-1'70}{0'1}\right) = p\left(z \le 0'2\right) = 0'5793$$

b) Podemos considerar este apartado como una distribución Binomial $B(N,p)$, donde $N = 3$, “p” es la probabilidad de que una persona mida más de $1'72\,m$ y “q” la probabilidad de que mida menos de $1'72\,m$.

$$p + q = 1 \quad \Rightarrow \quad p = 1-q = 1-0'5793 = 0'4207$$

$$B(3, 0'4207) = \binom{3}{1}\cdot 0'4207 \cdot 05793^3 = 0'2453$$