Junio 2002 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología

1)

a) $|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=10x-8y+2z$ $\qquad |B|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix}=-x-4y+3z$

b) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & 13 & -7 \end{pmatrix}$ $\qquad |AB|=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & 13 & -7 \end{vmatrix}=-8$

c) Las matrices A y B no tienen inversa cuando sus determinantes son iguales a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=10x-8y+2z=0 \qquad z=\frac{-10x+8y}{2}=-5x+4y$$

La matriz A no tendrá inversa para la terna de números reales de la forma $(x,y,-5x+4y)$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix}=-x-4y+3z=0 \qquad z=\frac{x+4y}{3}$$

La matriz B no tendrá inversa para la terna de números reales de la forma $\left(x,y,\frac{x+4y}{3}\right)$

2)

a) El vector de dirección de la recta es: $\overrightarrow{AB}=(0,2,1)-(1,-2,3)=(-1,4,-2)$

$$\begin{cases} x=-\lambda \\ y=2+4\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

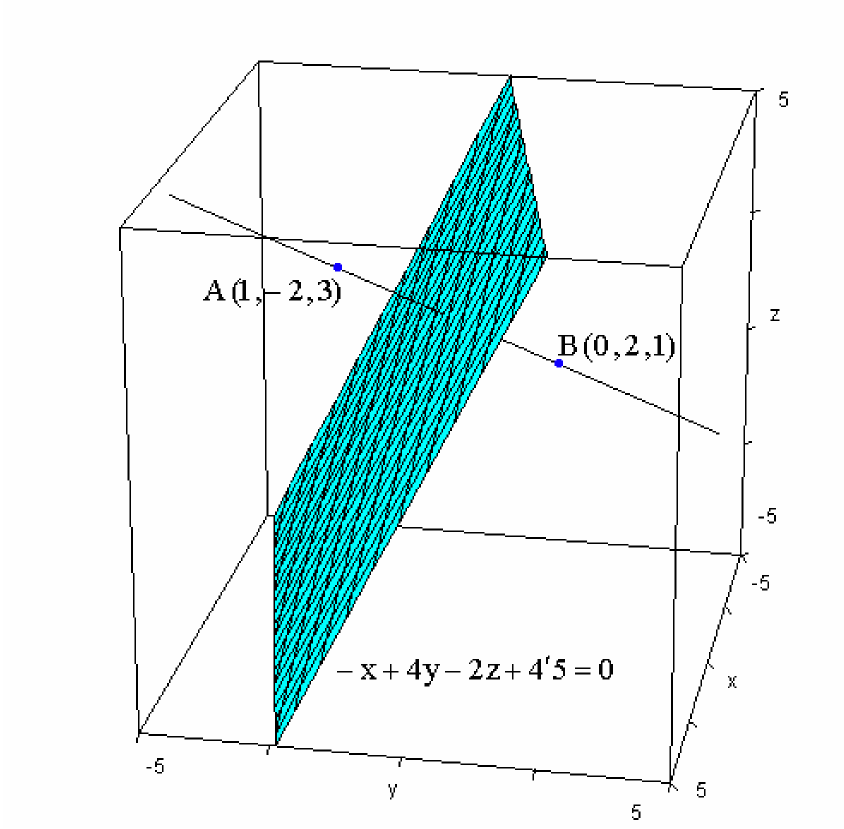
b) El plano pedido es aquel que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y es perpendicular a la recta que pasa por A y B, por tanto su vector característico coincide con el vector de dirección de la recta.

$$M\left(\frac{1+0}{2},\frac{-2+2}{2},\frac{3+1}{2}\right)=M(0'5,0,2) \qquad \vec{n}=(-1,4,-2)$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \to \quad -x+4y-2z+D=0$$

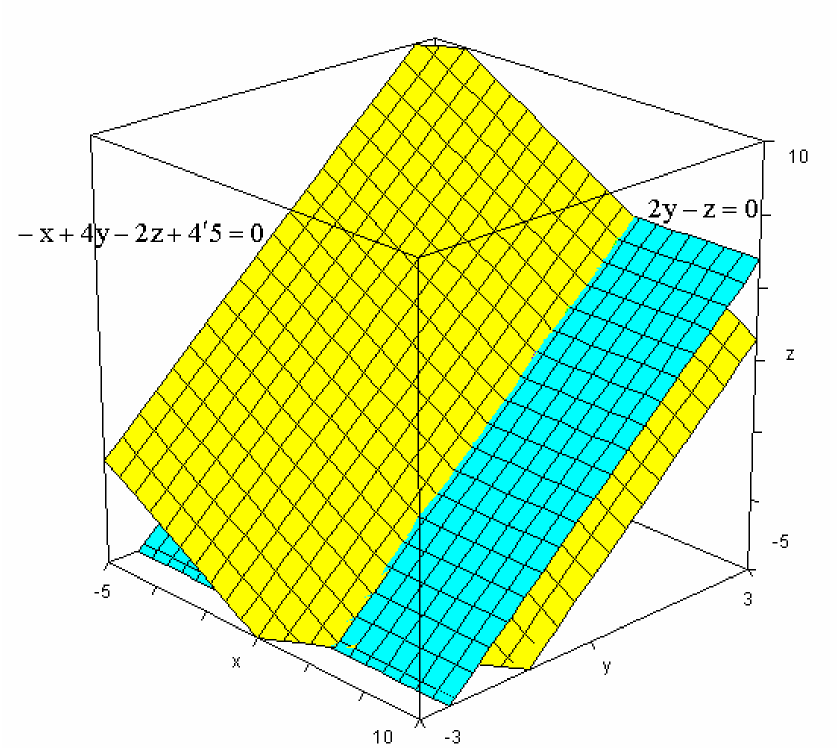
El punto medio debe verificar la ecuación del plano.

$$-0'5+4\cdot 0-2\cdot 2+D=0 \;\rightarrow\; D=4'5 \qquad -x+4y-2z+4'5=0$$



c) $\left.\begin{array}{r} 2y-z=0 \\ -x+4y-2z+4'5=0 \end{array}\right\}$ $\quad z=\lambda \quad \begin{cases} x=4'5 \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x=4'5 \\ y=\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

Al ser el valor de x constante, la recta es paralela al plano YZ y por tanto la distancia al origen es $4'5$.



3)

a) Sea "x" las horas de estudio e "y" las calificaciones de matemáticas.

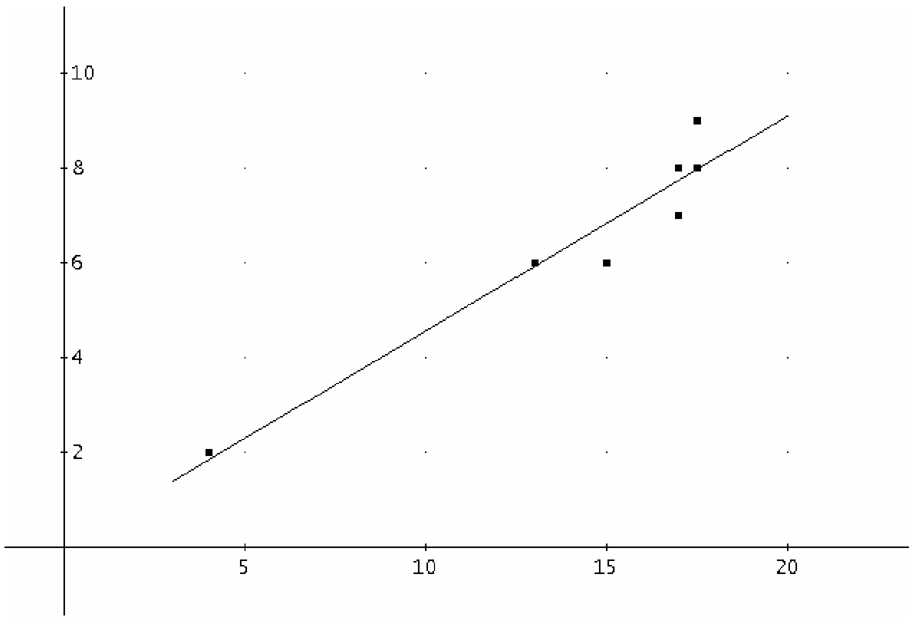
$$\begin{cases}\bar{x}=14'42\\ \sigma_x=4'52\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{y}=6'57\\ \sigma_y=2'12\end{cases} \qquad \sum xy=728'5 \qquad \sigma_{xy}=9'27$$

$$r=\frac{9'27}{4'52\cdot 2'12}=0'96$$

b) La correlación está próxima a 1, por lo tanto la correlación entre las variables es muy significativa y podemos hacer predicciones bastante fiables en el intervalo de datos del problema.

c) $y-\bar{y}=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\bar{x})$ $\qquad y-6'57=\dfrac{9'27}{4'52^2}(x-14'42)$ $\qquad y=0'45x+0'027$

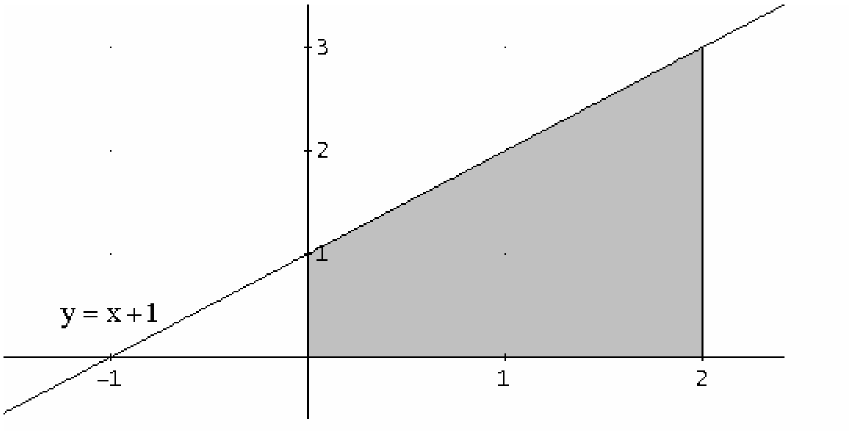
$$y(20)=0'45\cdot 20+0'027=9'1$$



4)

a) $\displaystyle\int_0^{a-1}(x+1)\,dx=\frac{9}{2}$ $\qquad \displaystyle\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^{a-1}=\frac{9}{2}$ $\qquad \dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ $\qquad a=\sqrt{10}$

b) $\displaystyle A=\int_0^2(x+1)\,dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4u^2$


y = x + 1
3
2
1
-1
1
2

1)

a) $$\left|M(\lambda)\right| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \neq 0 \quad \forall \lambda \in R$$

b) $$\left|M(0)\right| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \left(\mathrm{Adj}M(0)\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathrm{Adj}M(0)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M(0)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que $\left|A \cdot A^{-1}\right| = \left|A\right| \cdot \left|A^{-1}\right| = \left|I\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|}$

$$\left|A B^{-1} C^{-1}\right| = \left|A\right|\left|B^{-1}\right|\left|C^{-1}\right| = \left|A\right| \cdot \frac{1}{\left|B\right|} \cdot \frac{1}{\left|C\right|} = \frac{\left|A\right|}{\left|B\right|\left|C\right|} = \frac{\left|M(8)\right|}{\left|M(4)\right|\left|M(3)\right|} = \frac{50}{10 \cdot 5} = 1$$

2)

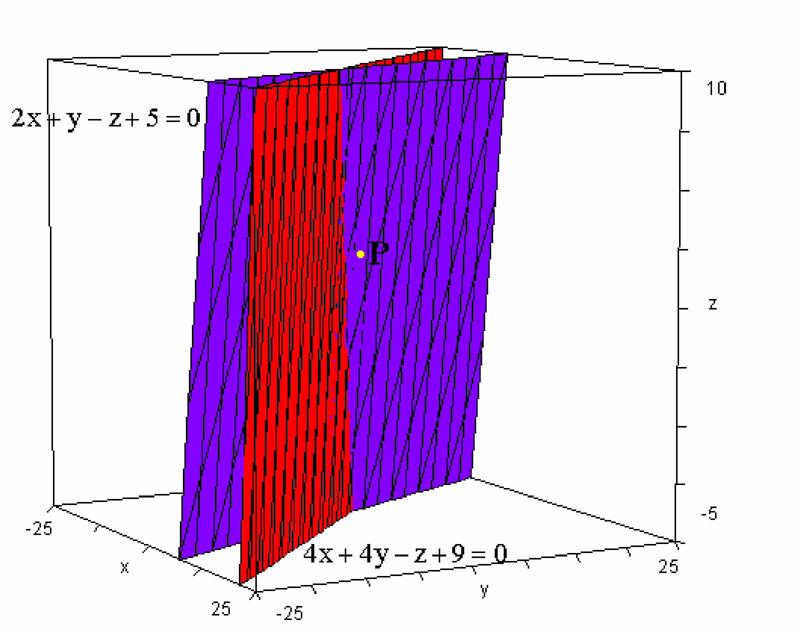
a) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 4x + 4y - z + 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = -5 + \lambda \\ 4x + 4y = -9 + \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{4} + \dfrac{3}{4}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{4} + \dfrac{3}{4}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{u} = \left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}, 1\right) = (3, -2, 4) \\ \text{Si } \lambda = 1 \;\Rightarrow\; A(-2, 0, 1) \end{array}\right.$$

La distancia desde la recta hasta el punto P es: $d(P, r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

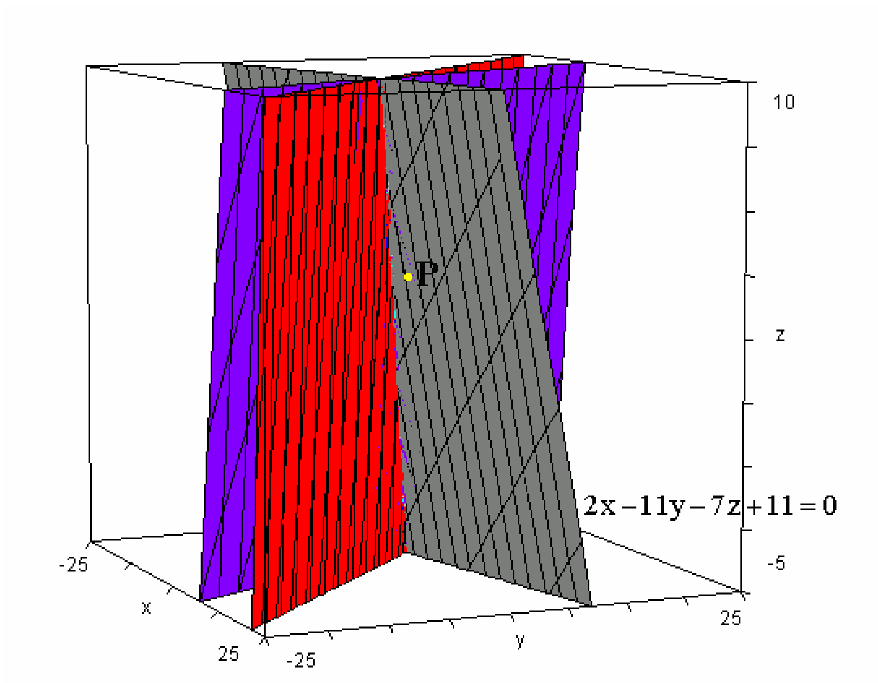
$$\overrightarrow{AP} = (3, -1, 4) - (-2, 0, 1) = (5, -1, 3)$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 4\end{matrix}\right\|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{\left|2\vec{i}-11\vec{j}-7\vec{k}\right|}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{29}}=\sqrt{\frac{174}{29}}=\sqrt{6}$$



b) El plano queda determinado por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z-1\\ 3 & -2 & 4\\ 5 & -1 & 3\end{vmatrix}=-2x+11y+7z-11=0 \quad\rightarrow\quad 2x-11y-7z+11=0$$



3)

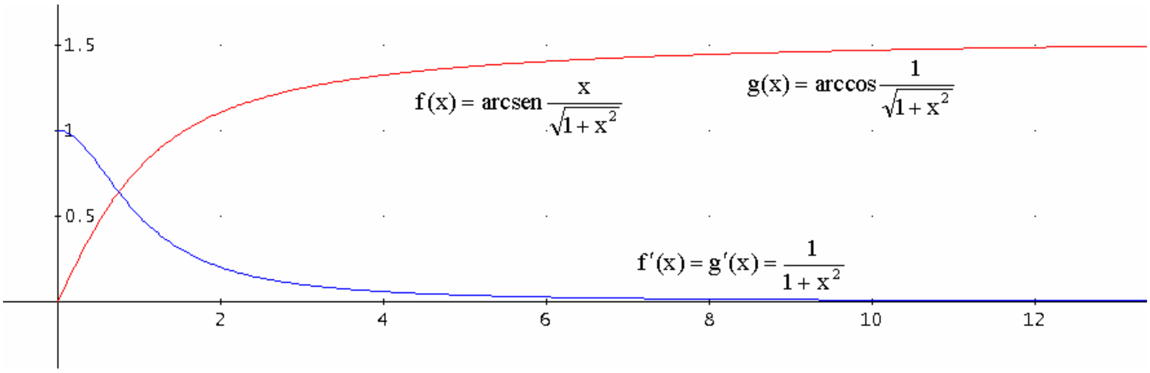
$$\text{a)}\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}\cdot(1+x^2)}=$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{0-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\cdot(1+x^2)}=$$

$$\frac{x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$

Como las dos funciones tienen la misma derivada quiere decir que se diferencian en una constante.



4) Se trata de un distribución Binomial $B(3,0'2)$

$$\text{a)}\quad p(x=3)=\binom{3}{3}\cdot 0'2^3\cdot 0'8^0=0'008$$

$$\text{b)}\quad p(x=0)=\binom{3}{0}\cdot 0'2^0\cdot 0'8^3=0'512$$

$$\text{c)}\quad p(x=1)=\binom{3}{1}\cdot 0'2^1\cdot 0'8^2=0'384$$