Junio 2001 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología

1) Consideramos un punto genérico a una distancia 6 unidades del plano dado. Las ecuaciones de los dos planos paralelos salen de aplicar la fórmula de la distancia de un punto a un plano, que en este caso vale 6.

$$6=\frac{|12x+3y-4z-7|}{\sqrt{12^2+3^2+4^2}} \qquad \begin{cases} 12x+3y-4z-7=6\sqrt{12^2+3^2+4^2} \\ -(12x+3y-4z-7)=6\sqrt{12^2+3^2+4^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x+3y-4z=71 \\ 12x+3y-4z=-85 \end{cases}$$

2) Es una distribución Normal $N(105,5)$.

a) $p(x>112)=p\left(z\geq\frac{112-105}{5}\right)=p(z\geq 1'4)=1-p(z\leq 1'4)=1-0'9192=0'0808=8'08\%$

b) $p(x>115)=p\left(z\geq\frac{115-105}{5}\right)=p(z\geq 2)=1-p(z\leq 2)=1-0'9772=0'0228=2'28\%$

Es una probabilidad condicionada $\quad p(x>115/x>112)=\frac{0'0228}{0'0808}=0'2822$

3)

a) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}=-8\neq 0 \quad (\text{Adj}A)=\begin{pmatrix}2 & -4\\-3 & 2\end{pmatrix} \quad (\text{Adj}A)^t=\begin{pmatrix}2 & -3\\-4 & 2\end{pmatrix} \quad A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -3\\-4 & 2\end{pmatrix}$

La expresión del sistema en forma matricial es: $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$

De $AX=B \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \rightarrow X=A^{-1}B=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -3\\-4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b) $A^2+A=I \rightarrow A(A+I)=I \Rightarrow A^{-1}=A+I$ ya que $A\cdot A^{-1}=I$

$$A^{-1}=A+I=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+1 & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22}+1 & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}+1\end{pmatrix}$$

4)

a) Si el perímetro del triángulo equilátero es x entonces el lado mide $\frac{x}{3}$ y si el perímetro del cuadrado es $100-x$ entonces el lado mide $\frac{100-x}{4}$.

El área del triángulo es: $A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{36}}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{36}$

El área del cuadrado es: $A_C = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{(100-x)^2}{16}$

La función pedida es: $f(x) = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{36} + \frac{(100-x)^2}{16}$

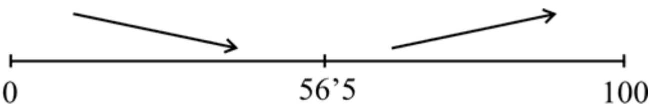
Puesto que el valor de x tiene que ser positivo el dominio es $D[f(x)] = \forall x \in [0,100]$

b) $f'(x) = \frac{\sqrt{3}\,x}{18} - \frac{100-x}{8} = \frac{4\sqrt{3}\,x - 900 + 9x}{72}$

$$4\sqrt{3}\,x - 900 + 9x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} = 56'50$$

$f'(10) < 0$

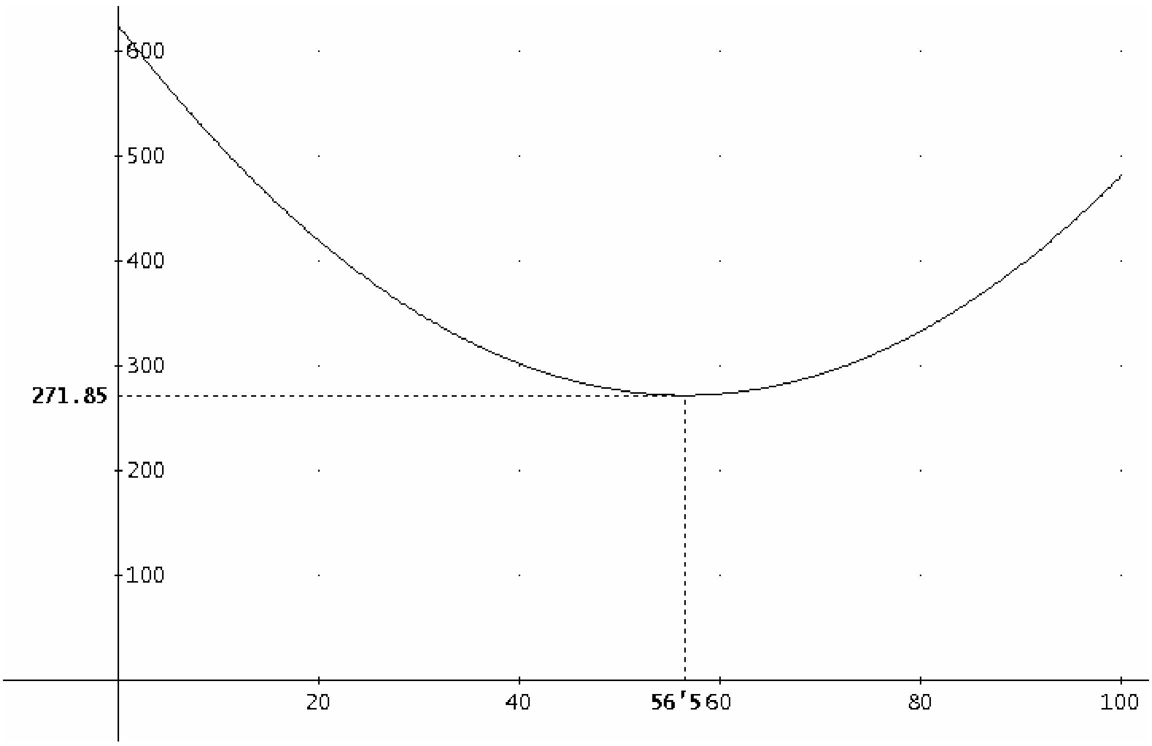
$f'(60) > 0$



La función es decreciente $\forall x \in \left]0, 56'5\right[$

La función es creciente $\forall x \in \left]56'5, 100\right[$

c) La función presenta un mínimo para $x = 56'5$ y su valor es $f(56'5) = 271'85\ m^2$



1)

a) Para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=3$ tiene que ser continua en dicho punto.

La función es continua en $x=3$ ya que:

1) $f(3)=4$

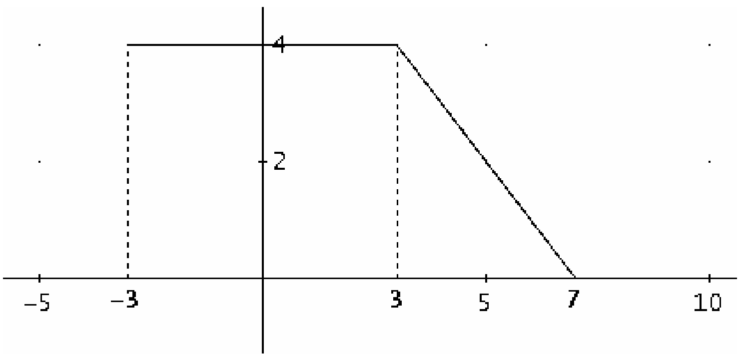
2) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} 4=4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(7-x)=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$

3) $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$

Estudiamos la derivabilidad en $x=3$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -3<x<3 \\ -1 & \text{si} \quad 3<x<7 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_-(3)=0 \\ f'_+(3)=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists\, f'(3)$$

La función no es derivable en $x=3$. Geométricamente quiere decir que las pendientes de las rectas tangentes trazadas a la gráfica de la función $f(x)$ en $x=3$ por su izquierda y por su derecha no coinciden, lo que significa que la función presenta en $x=3$ un punto anguloso como se observa en la siguiente gráfica.



2) $AX+B=C \;\to\; AX=C-B \;\to\; A^{-1}AX=A^{-1}(C-B) \;\Rightarrow\; X=A^{-1}(C-B)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}=6\neq 0 \qquad (\mathrm{Adj}A)=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}A)^t=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C-B=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\-12&3&0\\8&-5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\\-9\\17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\\frac{17}{6}\end{pmatrix}$$

3)

a) Se trata de una distribución binomial $B\left(3,\frac{2}{5}\right)=B(3,0'4)$

$$p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=0'784$$

b) Se trata de una distribución binomial $B\left(3,\frac{5}{8}\right)$

$$p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3=0'947$$

La probabilidad es mayor en el segundo caso ya que es mayor la probabilidad de sacar una bola roja de una única urna.

4)

a) Las ecuaciones de las tres rectas vienen dadas por los cortes de dos planos, por tanto:

$$r_1 \to \left.\begin{matrix}x+y+z=3\\z=0\end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix}x+y=3\\z=0\end{matrix}\right\} \to \begin{cases}x=3-\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{cases} \Rightarrow \quad r_1 \text{ está en el plano XY}$$

$$r_2 \to \left.\begin{matrix}x-z=0\\z=0\end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix}x=0\\z=0\end{matrix}\right\} \to \begin{cases}x=0\\y=\lambda\\z=0\end{cases} \Rightarrow \quad r_2 \text{ coincide con el eje OY}$$

$$r_3 \to \left.\begin{matrix}y-z=0\\z=0\end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix}y=0\\z=0\end{matrix}\right\} \to \begin{cases}x=\lambda\\y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow \quad r_3 \text{ coincide con el eje OX}$$

b) Del apartado a) deducimos que los puntos de corte de las tres rectas son los vértices de la base del tetraedro, es decir:

De r_2 y $r_3 \to A(0,0,0)$, de r_1 y $r_3 \to B(3,0,0)$ y de r_1 y $r_2 \to A(0,3,0)$

El cuarto vértice del tetraedro lo obtenemos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos π_1,π_2 y π_3.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad D(1,1,1)$$

El área de la cara del tetraedro situada sobre el plano π_4 la podemos deducir de las coordenadas de los vértices del triángulo de la base, ya que tanto la base del triángulo como la altura son 3.

$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{3\cdot 3}{2}=4'5$$