Septiembre 2010

OPCIÓN A

Problema 1

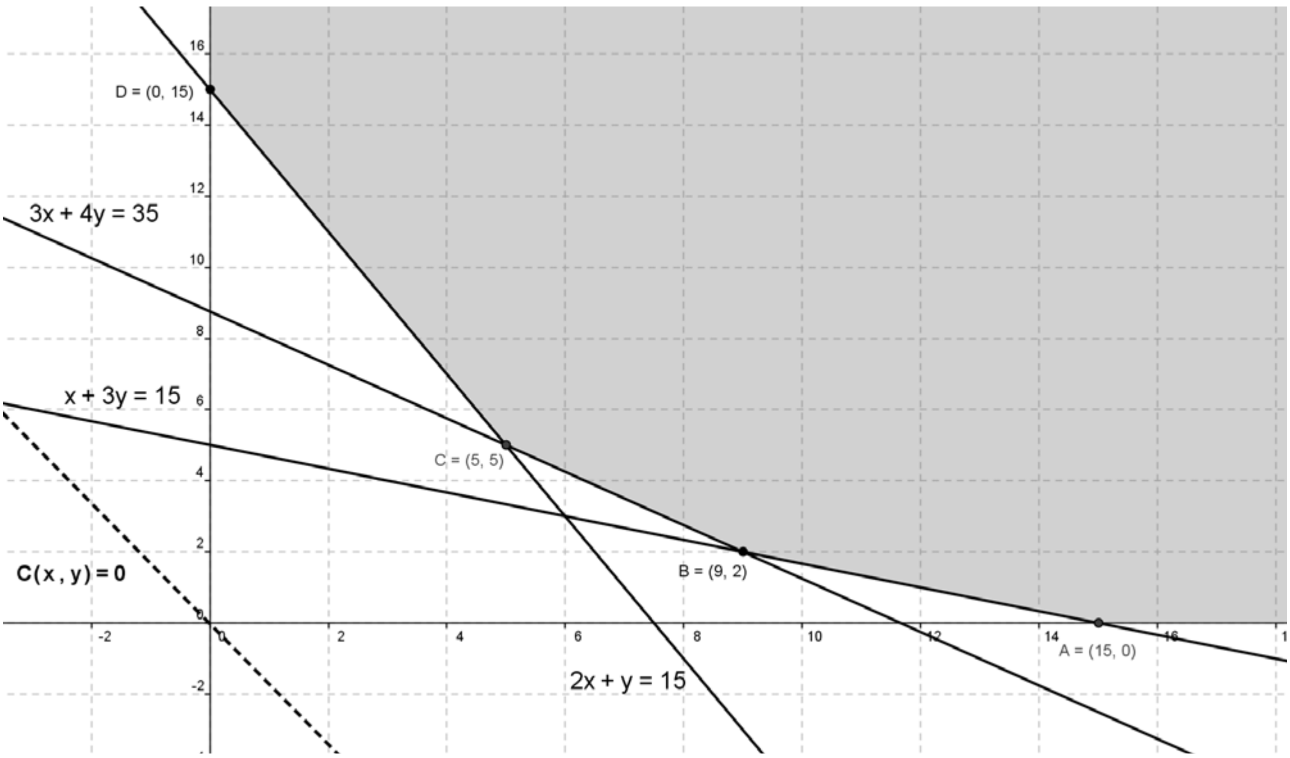
Llamamos "x" a la cantidad de alimento copncentrado e "y" a la cantidad de forraje.

	AC (x)	F (y)	
PC	300	400	3500
FC	100	300	1500
ENL	2	1	15

La función objetivo a maximizar es: $C(x, y) = 11x + 6'5y$ con las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 300x + 400y \geq 3500 \\ 100x + 300y \geq 1500 \\ 2x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 4y \geq 35 \\ x + 3y \geq 15 \\ 2x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos gráficamente las rectas $3x + 4y = 35$ $x + 3y = 15$ $2x + y = 15$



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$A(15,0)$ $\left.\begin{array}{r}3x+4y=35\\ x+3y=15\end{array}\right\} \rightarrow B(9,2)$ $\left.\begin{array}{r}2x+y=15\\ 3x+4y=35\end{array}\right\} \rightarrow C(5,5)$ $D(0,15)$

Sustituyendo A, B, C y D en la función objetivo obtenemos:

$$C(15,0)=11\cdot 15+6'5\cdot 0=165\,€ \qquad C(9,2)=11\cdot 9+6'5\cdot 2=112\,€$$

$$C(5,5)=11\cdot 5+6'5\cdot 5=87'5\,€ \qquad C(0,15)=11\cdot 0+6'5\cdot 15=97'5\,€$$

El coste mínimo se obtiene cuando la ración alimenticia contiene 5 kg de alimento concentrado y 5 kg de forraje. Este coste es de $87'5\,€$.

Problema 2

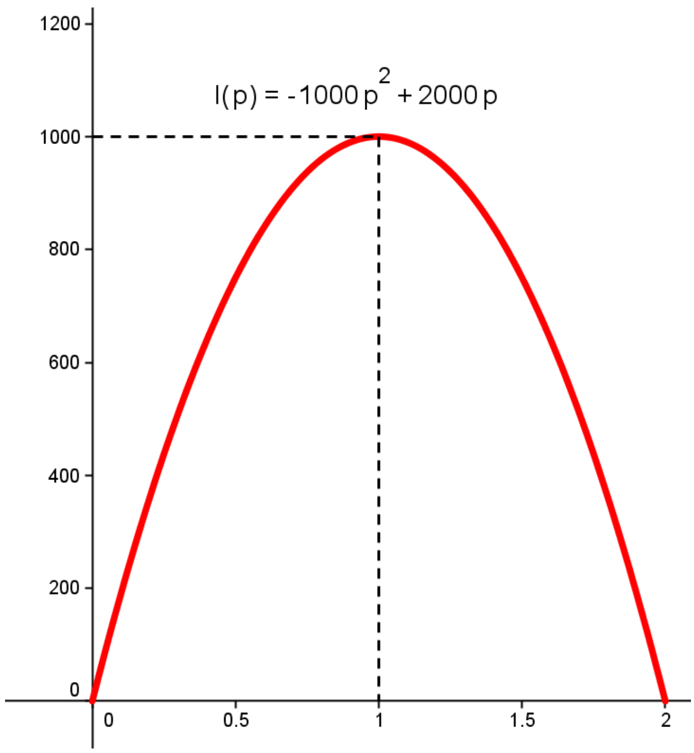
a) $I(p)=p\cdot n(p)=2000p-1000p^2$

b) $I'(p)=2000-2000p=0 \quad \Rightarrow \quad p=1\,€$

$I''(p)=-2000<0 \quad \Rightarrow$ como la función $I(p)$ es convexa en $p=1$ hay un máximo.

Para que los ingresos sean máximo se debe vender cada pastel a 1 € y en este caso los ingresos serán de

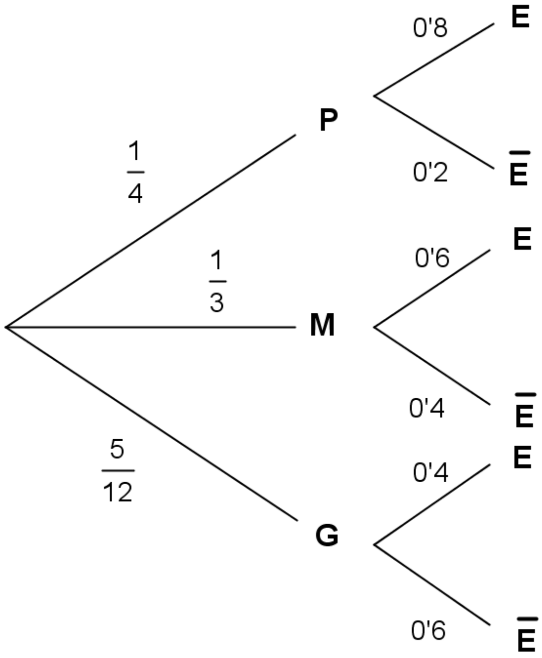
$$I(1)=2000\cdot 1-1000\cdot 1^2=1000\,€$$



Problema 3

El número de alumnos que irán en el autobús pequeño se obtiene despejando x en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5}{12}$$



a) $p(E)=\frac{1}{4}\cdot 0'8+\frac{1}{3}\cdot 0'6+\frac{5}{12}\cdot 0'4=0'5\widehat{6}$

b) Por el Teorema de Bayes:

$$p(M/\overline{E})=\frac{p(M\cap\overline{E})}{p(\overline{E})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0'4}{\frac{1}{4}\cdot 0'2+\frac{1}{3}\cdot 0'4+\frac{5}{12}\cdot 0'6}=0'3077$$

Otra posibilidad es, sabiendo que $p(E)+p(\overline{E})=1$ sustituir el denominador de la expresión anterior por $p(\overline{E})=1-p(E)=1-0'5\widehat{6}=0'4\widehat{3}$

c) $p\big((G\cup P)/E\big)+p(M/E)=1 \quad \Rightarrow \quad p\big((G\cup P)/E\big)=1-p(M/E)=1-\frac{p(M\cap E)}{p(E)}=1-\frac{\frac{1}{3}\cdot 0'6}{0'5\widehat{6}}$

$$p\big((G\cup P)/E\big)=1-\frac{\frac{1}{3}\cdot 0'6}{0'5\widehat{6}}=0'647$$

OPCIÓN B

Problema 1

Sea "x" el nº de entradas normales vendidas, "y" el nº de entradas del día del espectador vendidas y "z" el nº de entradas vendidas a los jubilados. Tenemos planteado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1405 \\ 6x+4y+3z=7920 \\ 4y+3z=0'1\cdot 6x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1405 \\ 6x+4y+3z=7920 \\ 40y+30z=6x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1405 \\ 6x+4y+3z=7920 \\ 6x-40y-30z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1405 \\ 6 & 4 & 3 & 7920 \\ 6 & -40 & -30 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{F_2-5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1405 \\ 0 & -2 & -3 & -510 \\ 0 & -44 & -33 & -7920 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-22F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1405 \\ 0 & -2 & -3 & -510 \\ 0 & 0 & 33 & 3300 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1405 \\ -2y-3z=-510 \\ 33z=3300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=100 \\ y=105 \\ x=1200 \end{array}\right.$$

Hay que vender 100 entradas de jubilados, 105 entradas del día del espectador y 1200 entradas normales.

Problema 2

a) La función $f(x)=\dfrac{2}{x}$ es continua $\forall x \in \left]1,2\right[$

Continuidad en $x=2$

$$f(2)=\frac{2}{2}=1 \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 1=1 \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=1$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=2$.

La función $f(x)=1$ es continua $\forall x \in \left]2,3\right[$

Continuidad en $x=3$

$$f(3)=1 \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} (-x^2+6x-8)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=1$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=3$.

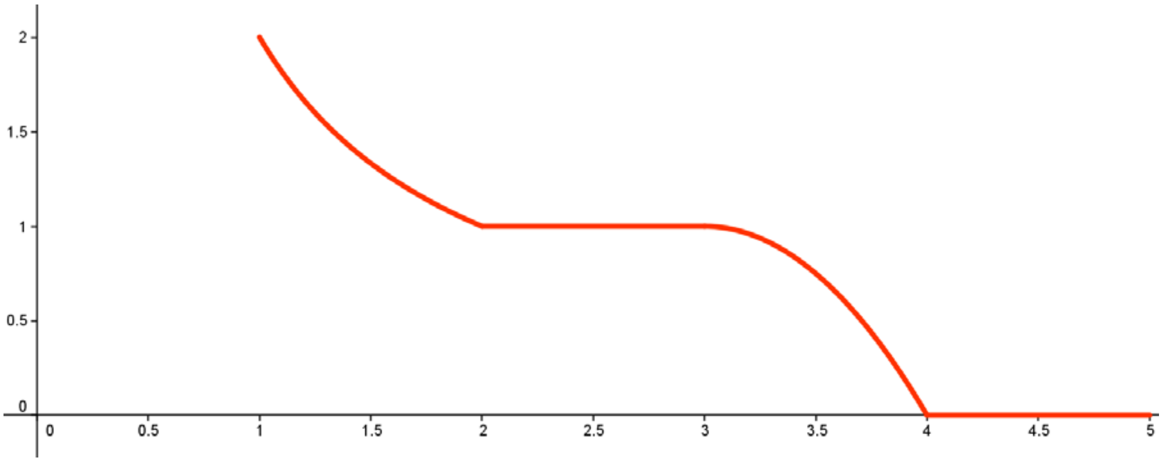
La función $f(x)=-x^2+6x-8$ es continua $\forall x\in\left]3,4\right[$

Continuidad en $x=4$

$$f(4)=-4^2+6\cdot 4-8=0 \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-}(-x^2+6x-8)=0\\ \lim\limits_{x\to 4^+}0=0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^+}f(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=f(4) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=4$.

La función $f(x)=0$ es continua $\forall x\in\left]4,5\right[$

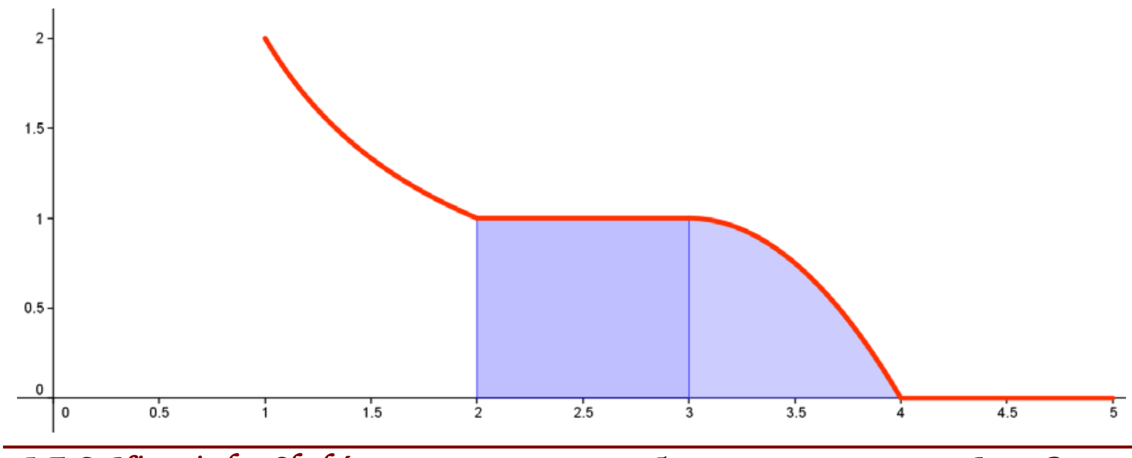


b) Comprobamos si entre $x=2$ y $x=3$ existe algún punto de corte con el eje de abscisas.

$$-x^2+6x-8=0 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=4\end{cases}$$

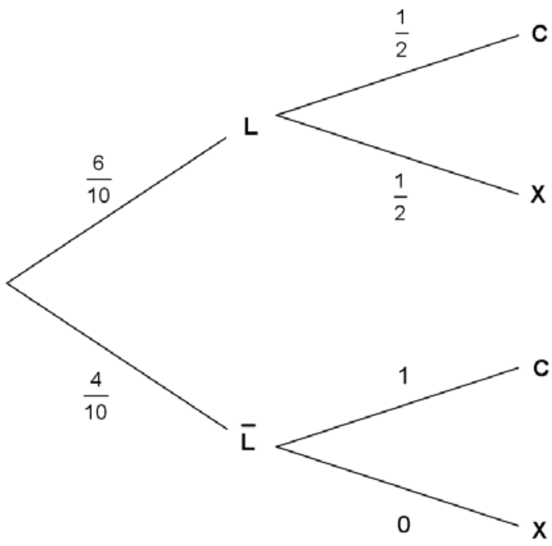
$$A=\left|\int_2^3 dx\right|+\left|\int_3^4(-x^2+6x-8)\,dx\right|=\left|[x]_2^3\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_3^4\right|$$

$$|3-2|+\left|-\frac{64}{3}+48-32-(-9+27-24)\right|=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}u^2$$



Problema 3

Hacemos un diagrama en árbol para calcular las probabilidades.



a) $p(C)=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{10}\cdot 1=\frac{7}{10}$

b) $p(L/C)=\frac{p(L\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}}=\frac{3}{7}$

c) $p(L\cap\bar{L})+p(\bar{L}\cap L)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$