# Septiembre 2009

# BLOQUE A

## Problema A1

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Calculamos la matriz inversa de A. Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ significa que la matriz A no tiene inversa, por lo que nos vemos obligados a resolver la ecuación matricial $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-z=-1 \\ x+2y=0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos y la podemos eliminar. El sistema es Compatible Indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=t} \left.\begin{array}{r} x+y=1-t \\ y=-1+t \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{array}\right. \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1+t \\ t \end{pmatrix}$$

Cuando $t=1$ la primera fila de la matriz X es cero y la matriz pedida es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## Problema A2

Sea "x" el número de individuos a favor de cierta normativa, "y" el número de individuos en contra y "z" el número de individuos que no opinan. Planteamos un sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ -x+3y-z=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & 4 & 0 & 360 \end{pmatrix}$$

El sistema que resulta es: $\left.\begin{aligned} x+y+z&=360 \\ -3y-3z&=-360 \\ 4y&=360 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=360 \\ y+z&=120 \\ y&=90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=240 \\ y=90 \\ z=30 \end{cases}$

El resultado nos dice que hay 240 individuos a favor de la normativa, 90 en contra y 30 que no opinan.

# BLOQUE B

## Problema B1

a) Dominio $D[f(x)] = \forall x \in R$

Cortes con OX $\rightarrow$ $y=0$ $\quad \dfrac{x}{1+x^2}=0 \quad x=0$. Corta al eje OX en el punto $(0,0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $x=0$ $\quad y=\dfrac{0}{1}=0$. Corta al eje OY en el punto $(0,0)$

b) Ecuaciones de las asíntotas.

Asíntotas verticales no hay.

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y=0 \text{ es una asíntota horizontal}$$

c) Monotonía

$$f'(x) = \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Igualamos a cero el numerador y el denominador por separado, y con las soluciones obtenidas formamos los intervalos para estudiar la monotonía.

$$1-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1 \qquad\qquad 1+x^2 \neq 0$$

$f'(-2)<0 \qquad f'(0)>0$

$f'(2)<0$

La función es creciente $\forall x \in \left]-1,1\right[$

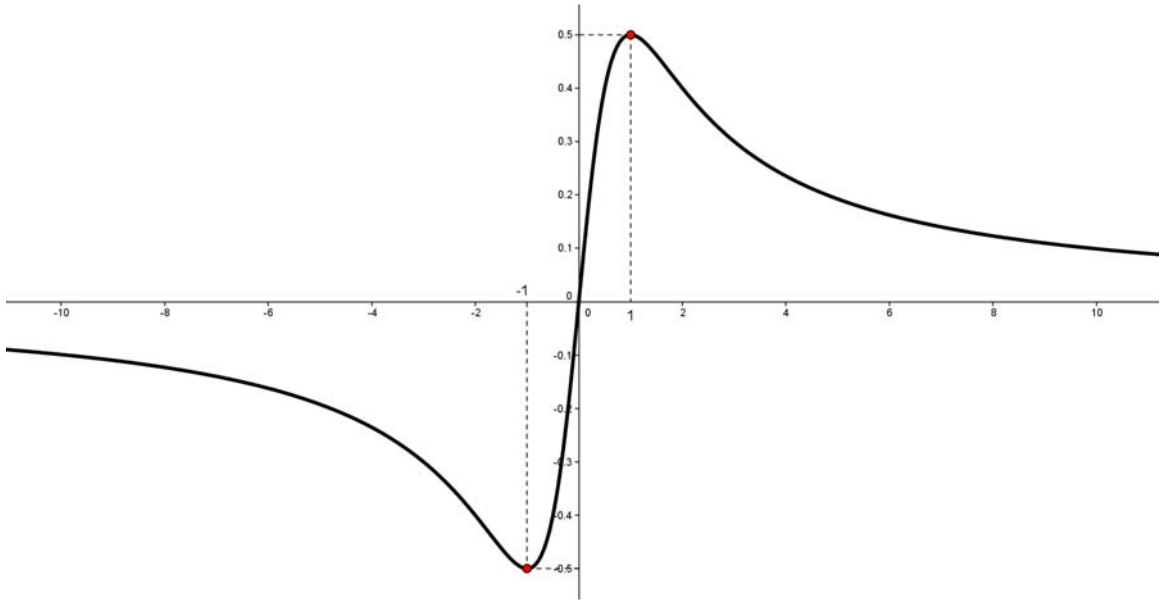
La función es decreciente $\forall x \in \left]-\infty,-1\right[ \cup \left]1,\infty\right[$

d) Del estudio de la monotonía se deduce:

Hay un Máximo local en el punto $(1, f(1)) = (1, 0'5)$

Hay un Mínimo local en el punto $(-1, f(-1)) = (-1, -0'5)$

e)



## Problema B2

a) $C(x) = 0'1x^2 + 20x + 2500 \qquad I(x) = 80x$

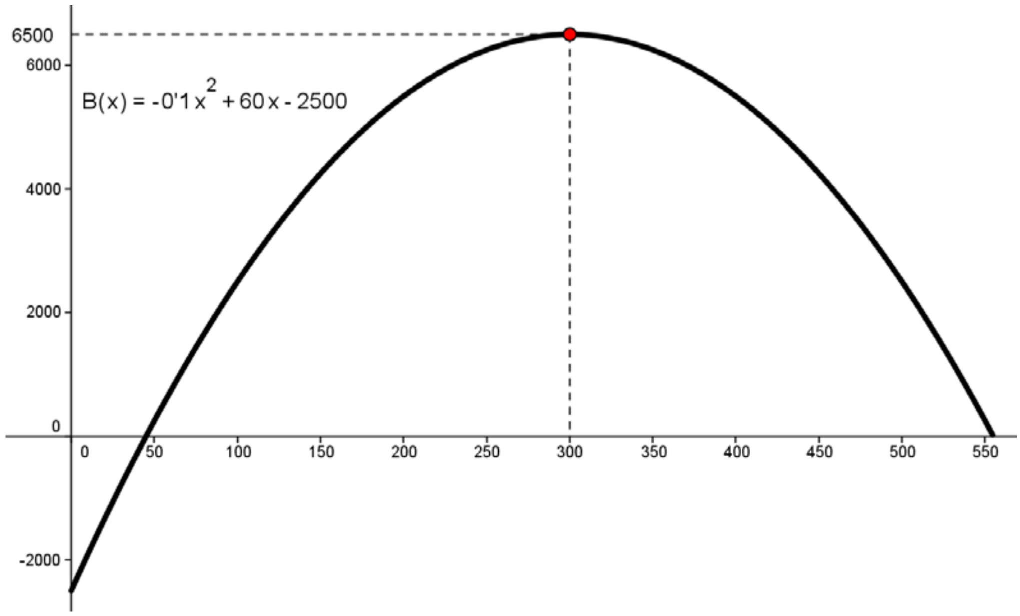
b) $B(x) = I(x) - C(x) = 80x - (0'1x^2 + 20x + 2500) = -0'1x^2 + 60x - 2500$

c) $B'(x) = -0'2x + 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 300$

$B''(300) = -0'2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en $x = 300$ hay un máximo.

Hay que producir 300 cajas de bombones para obtener un beneficio máximo de

$$B(300) = -0'1 \cdot 300^2 + 60 \cdot 300 - 2500 = 6500\,€$$



# BLOQUE C

## Problema C1

Con los datos del problema podemos elaborar una tabla de contingencia.

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $p(A \cap B)$ | $p(\overline{A} \cap B)$ | $p(B)$ |
| $\overline{B}$ | $p(A \cap \overline{B})$ | $p(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $p(\overline{B})$ |
| | $p(A)$ | $p(\overline{A})$ | 1 |

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $0'15$ | $0'25$ | $0'4$ |
| $\overline{B}$ | $0'35$ | $0'25$ | $0'6$ |
| | $0'5$ | $0'5$ | 1 |

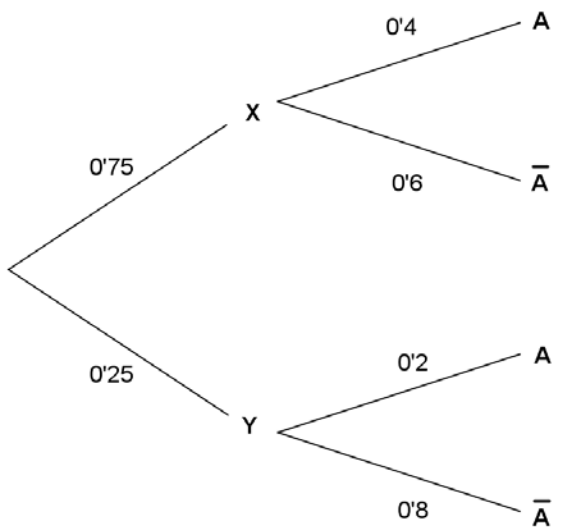
a) $p(A \cap B) = 0'15$

b) $p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) = 0'35 + 0'25 = 0'6$

c) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'15}{0'5} = 0'3$

## Problema C2

Sean los sucesos: $X =$ la venta corresponde a un turismo, $Y =$ la venta corresponde a un todoterreno, $A =$ la persona compra un coche por primera vez y $\overline{A} =$ la persona no compra un coche por primera vez. Podemos establecer el siguiente diagrama en árbol:




a) $p(\overline{A}) = p(X \cap \overline{A}) + p(Y \cap \overline{A}) = 0'75 \cdot 0'6 + 0'25 \cdot 0'8 = 0'65$

b) $p(X \cap A) = 0'75 \cdot 0'4 = 0'3$

c) $p(Y \cap \overline{A}) = 0'25 \cdot 0'8 = 0'2$

# BLOQUE D

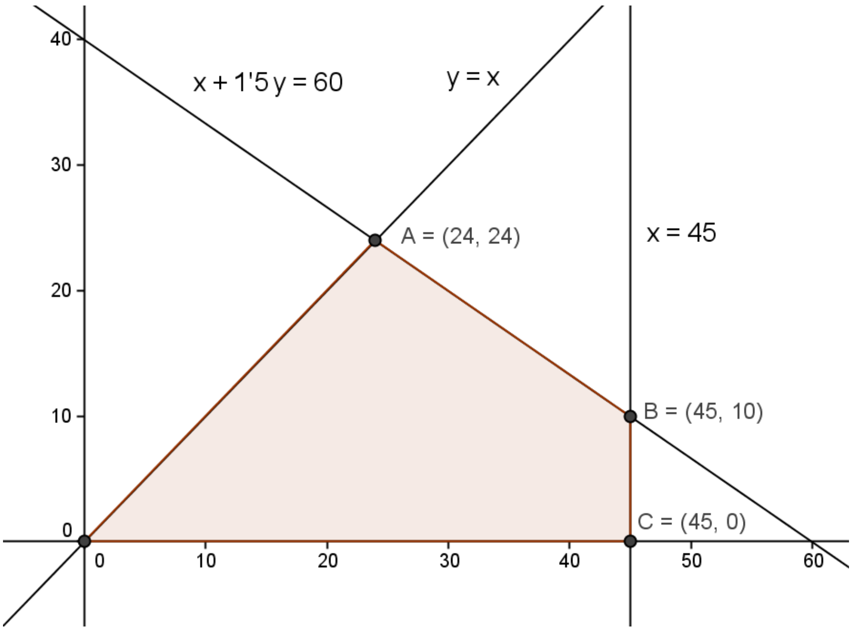
## Problema D1

Sea "x" el nº de apartamentos de lujo construidos e "y" el nº de apartamentos de superlujo. De los datos del problema se deduce el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq y \\ x \leq 45 \\ y \geq 0 \\ 1000000\,x + 1500000\,y \leq 60000000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq y \\ x \leq 45 \\ y \geq 0 \\ x + 1'5\,y \leq 60 \end{array}\right\}$$

La función objetivo a maximizar es: $F(x,y) = x + y$

Representamos gráficamente las rectas $y = x \qquad x = 45 \quad$ e $\quad y = \dfrac{60 - x}{1'5}$




Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ x + 1'5\,y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow A(24,24) \qquad \left.\begin{array}{r} x = 45 \\ x + 1'5\,y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow B(45,10) \qquad C(45,0)$$

Sustituyendo A, B y C en la función objetivo obtenemos:

$$F(24,24) = 24 + 24 = 48 \qquad F(45,10) = 45 + 10 = 55 \qquad F(45,0) = 45 + 0 = 45$$

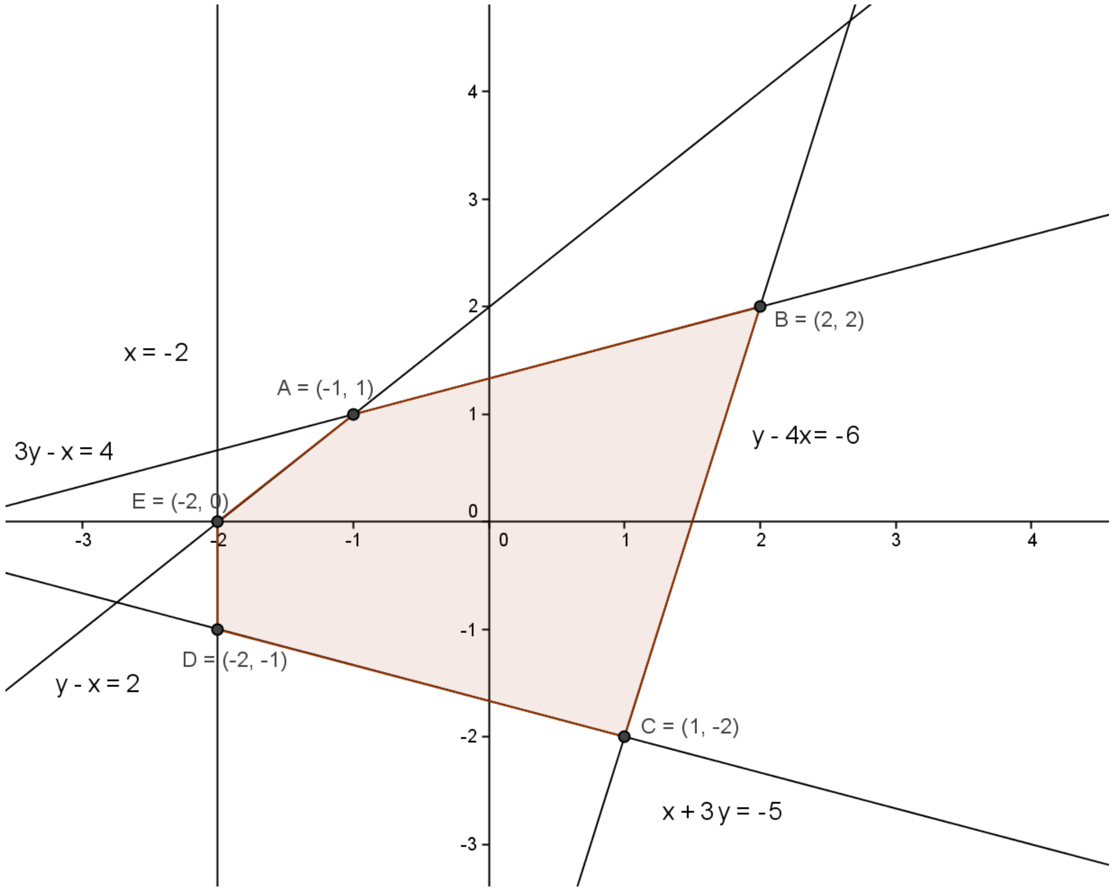
Se deben de construir 45 apartamentos de lujo y 10 de superlujo para maximizar el número de apartamentos construidos.

El coste de estos apartamentos es de $1000000 \cdot 45 + 1500000 \cdot 10 = 60000000$ € con lo que no sobrará nada del presupuesto.

## Problema D2

a) Representamos gráficamente las rectas:

$$x=-2 \qquad x+3y=-5 \qquad y-4x=-6 \qquad 3y-x=4 \qquad y-x=2$$




b) Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$\left.\begin{array}{r}-x+y=2\\-x+3y=4\end{array}\right\}\rightarrow A(-1,1) \qquad \left.\begin{array}{r}-x+3y=4\\-4x+y=-6\end{array}\right\}\rightarrow B(2,2) \qquad \left.\begin{array}{r}-4x+y=-6\\x+3y=-5\end{array}\right\}\rightarrow C(1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{r}x+3y=-5\\x=-2\end{array}\right\}\rightarrow D(-2,-1) \qquad \left.\begin{array}{r}x=-2\\-x+y=2\end{array}\right\}\rightarrow E(-2,0)$$

La función objetivo es $f(x,y)=2x-3y$

$$f(-1,1)=-2-3=-5 \qquad f(2,2)=4-6=-2 \qquad f(1,-2)=2+6=8$$

$$f(-2,-1)=-2+3=-1 \qquad f(-2,0)=-4$$

La función alcanza el mínimo en el punto $A(-1,1)$ y el máximo en el punto $C(1,-2)$.