Septiembre 2008 opción A. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) Sean "x", "y" y "z" los precios del ordenador, la cámara y el viaje respectivamente. Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1372 \\ x=y+z+140 \\ z+\dfrac{z}{2}+x+208=1372 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1372 \\ x-y-z=140 \\ 2x+3z=2328 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=756 \\ y=344 \\ z=272 \end{array}\right.$$

2)

a) $1-x^2=0 \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad D[f(x)]=\forall x\in R-\{-1,1\}$

Cortes con OX $\rightarrow$ $y=0 \quad \dfrac{x^3}{1-x^2}=0 \quad x^3=0 \quad x=0$ Corta al eje OX en $(0,0)$.

Corte con OY $\rightarrow$ $x=0 \quad y=\dfrac{0}{1-0}=0 \quad y=0$. Corta al eje OY en $(0,0)$

b) Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{1-x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{1-x^2}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{1-x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{1-x^2}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{-x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}(-x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{-x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}(-x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{no hay asíntotas horizontales}$$

c) $f'(x)=\dfrac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{3x^2-x^4}{(4-x^2)^2} \qquad 3x^2-x^4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2(3-x^2)=0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ 3 - x^2 = 0 & \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la primera derivada:

$f'(-2) < 0 \quad f'(-1'5) > 0$

$f'(0) > 0 \quad f'(1'5) > 0$

$f'(2) < 0$

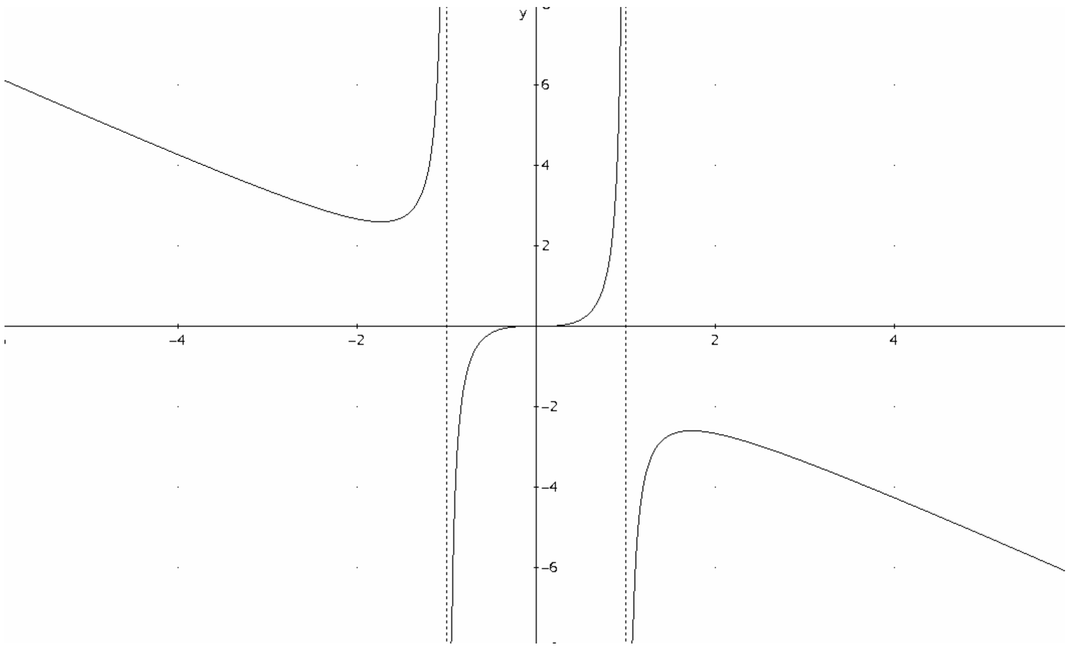
La función es creciente $\forall x \in \left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, \sqrt{3}\right[$

La función es decreciente $\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$

d) Hay un mínimo relativo en el punto $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) \quad \rightarrow \quad (-\sqrt{3}, 2'59)$

Hay un máximo relativo en el punto $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \quad \rightarrow \quad (\sqrt{3}, -2'59)$

e)



3) $f(x) = x^3 + r x^2 + s x + t \qquad f'(x) = 3x^2 + 2r x + s$

Si la función tiene un máximo en $x = -2$ significa que $f'(-2) = 0 \quad \rightarrow \quad 12 - 4r + s = 0$

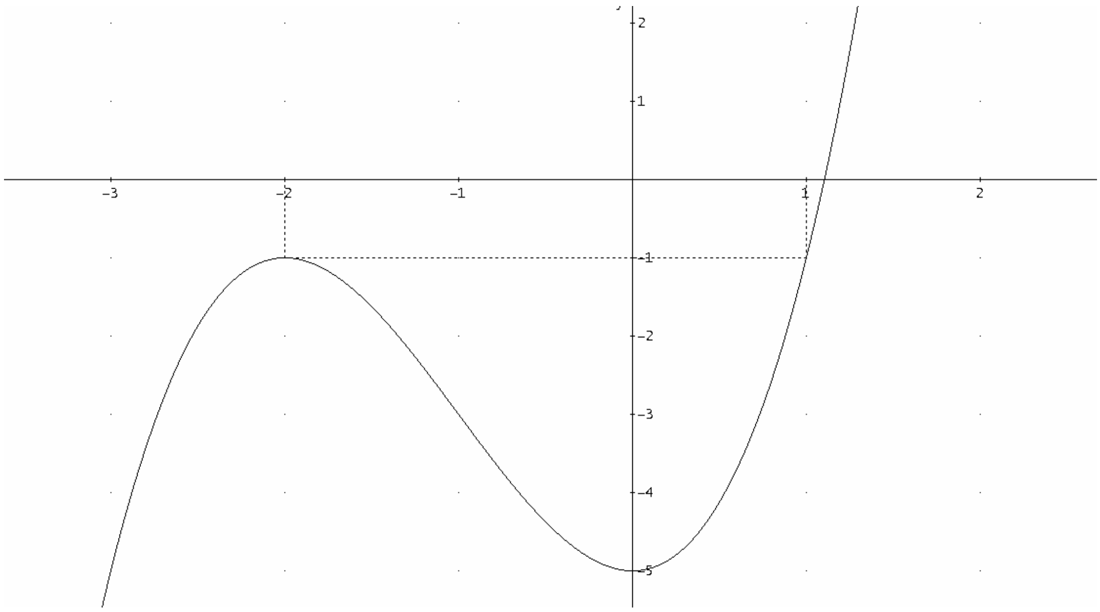
Si la función tiene un mínimo en $x = 0$ significa que $f'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0$

Si la función pasa por el punto $(1, -1)$ significa que $f(1) = -1 \quad \rightarrow \quad 1 + r + s + t = -1$

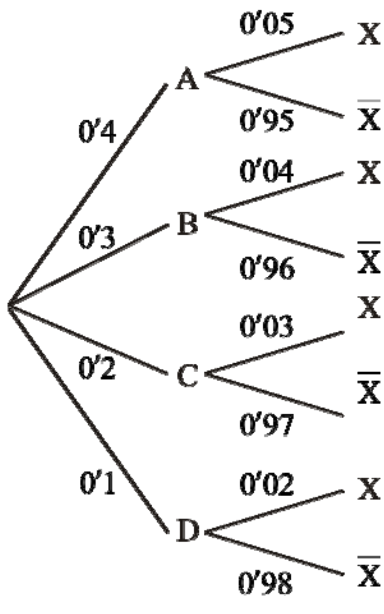
Como $s = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 12-4r=0 \\ 1+r+t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r=3 \\ t=-5 \end{array}\right.$$

La función que resulta es $f(x)=x^3+3x^2-5$



4) Sean A, B, C y D las factorías y sea X el suceso "el modelo es defectuoso". De los datos del problema obtenemos el siguiente diagrama en árbol:



a) $p(X)=0'4\cdot 0'05+0'3\cdot 0'04+0'2\cdot 0'03+0'1\cdot 0'02=0'04$

b) $p(C/\overline{X})=\dfrac{0'2\cdot 0'97}{0'4\cdot 0'95+0'3\cdot 0'96+0'2\cdot 0'97+0'1\cdot 0'98}=0'2020$

Septiembre 2008 opción B. Humanidades y Ciencias Sociales.

1)

a) $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$ $|A|=-10$ $(\mathrm{Adj}A)=\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}$ $(\mathrm{Adj}A)^t=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{5}&\frac{3}{10}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{10}\end{pmatrix}$

b) $XA^2+5A=\begin{pmatrix}6&8\\10&-20\end{pmatrix}$ $XA^2=\begin{pmatrix}6&8\\10&-20\end{pmatrix}-5A=\begin{pmatrix}6&8\\10&-20\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-7\\-10&-30\end{pmatrix}$

$$XA^2\cdot(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-7\\-10&-30\end{pmatrix}\cdot(A^2)^{-1}\qquad X=\begin{pmatrix}1&-7\\-10&-30\end{pmatrix}\cdot(A^2)^{-1}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}13&9\\12&16\end{pmatrix}\qquad |A^2|=100\qquad (\mathrm{Adj}(A^2))=\begin{pmatrix}16&-12\\-9&13\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{Adj}(A^2))^t=\begin{pmatrix}16&-9\\-12&13\end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}16&-9\\-12&13\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&-7\\-10&-30\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{100}\begin{pmatrix}16&-9\\-12&13\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}100&-100\\200&-300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}$$

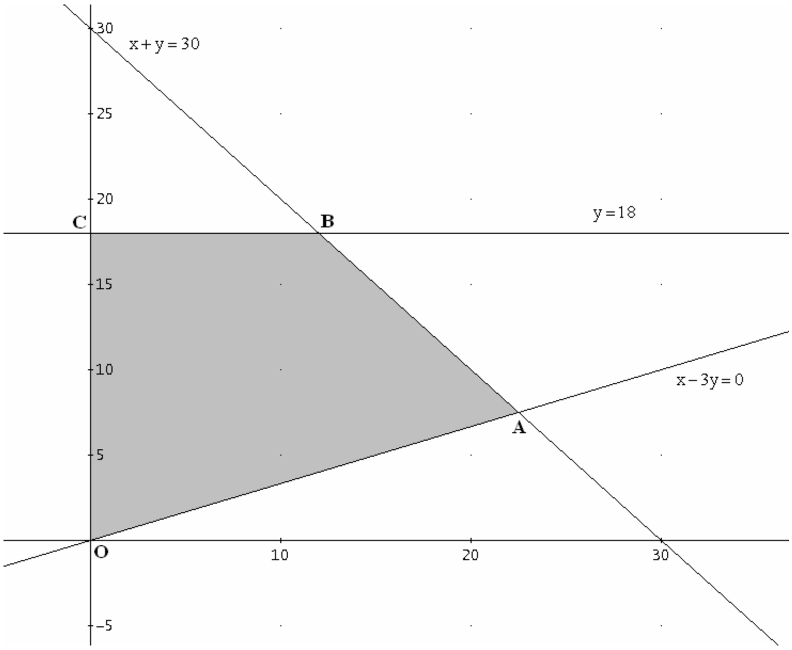
2) Sea “x” el número de toneladas de rape pescadas e “y” el número de toneladas de merluza pescadas. El precio del rape es de $15\,€/\mathrm{kg}=15000\,€/\mathrm{Tm}$ y el de la merluza de $10\,€/\mathrm{kg}=10000\,€/\mathrm{Tm}$.

La función ingresos que tenemos que maximizar es: $F(x,y)=15000x+10000y$

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{r}x+y\le 30\\x\le 3y\\y\le 18\\x\ge 0\\y\ge 0\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}x+y\le 30\\x-3y\le 0\\y\le 18\\x\ge 0\\y\ge 0\end{array}\right\}$$

Representamos gráficamente las rectas $x+y=30$ $x-3y=0$ $y=18$ y la región factible con sus vértices:



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$O(0,0) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x-3y=0 \end{array}\right\} \rightarrow A(22'5,7'5) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ y=18 \end{array}\right\} \rightarrow B(12,18) \qquad C(0,18)$$

Sustituyendo O, A, B y C en la función objetivo obtenemos:

$$F(0,0)=15000\cdot 0+10000\cdot 0=0 \text{ €}$$

$$F(22'5,7'5)=15000\cdot 22'5+10000\cdot 7'5=412500 \text{ €}.$$

$$F(12,18)=15000\cdot 12+10000\cdot 18=360000 \text{ €}$$

$$F(0,18)=15000\cdot 0+10000\cdot 18=180000 \text{ €}$$

Para maximizar los ingresos debe pescar $22'5$ toneladas de Rape y $7'5$ toneladas de merluza y los ingresos serán de 412500 €.

3)

a) Calculamos el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{5x^2+20x-25}{x^2+7}$

$$5x^2+20x-25=0 \qquad x^2+4x-5=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

Como -5 no es una solución válida, puesto que la variable "x" representa los años transcurridos, y el denominador de la fracción es siempre positivo, el signo de la función es:

$$f(x)<0 \text{ si } x\in\,]0,1[\qquad f(x)>0 \text{ si } x>1$$

Por tanto la empresa deja de tener pérdidas a partir del primer año.

b) Calculamos la derivada de la función y estudiamos la monotonía.

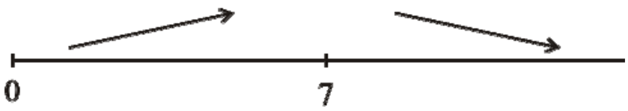
$$f'(x)=\frac{(10x+20)(x^2+7)-(5x^2+20x-25)\,2x}{(x^2+7)^2}=\frac{-20x^2+120x+140}{(x^2+7)^2}$$

$$-20x^2+120x+140=0 \qquad x^2-6x+7=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=7 \end{cases}$$

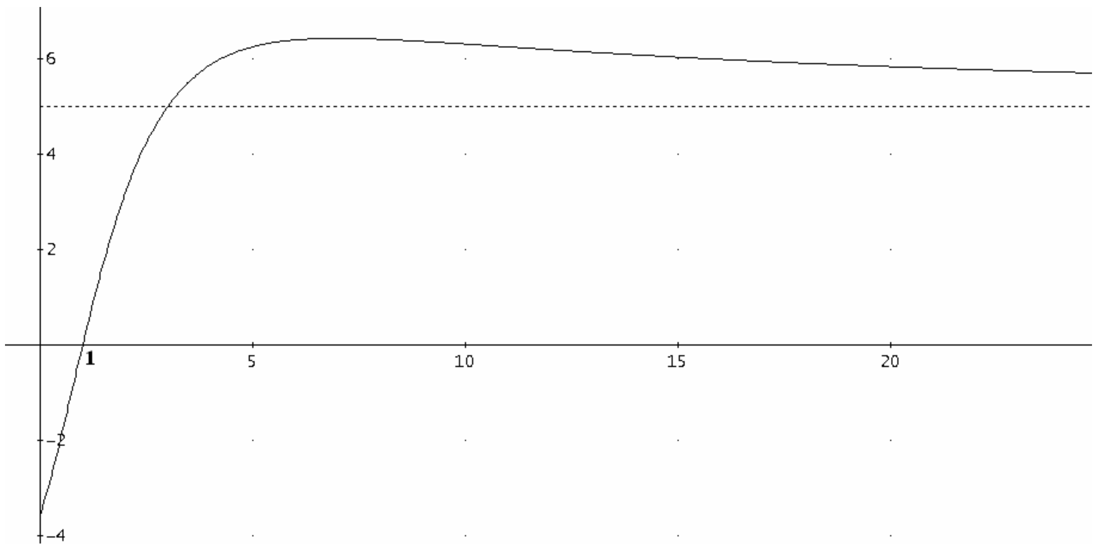
-1 no es una solución válida, y como el denominador de la fracción correspondiente a la primera derivada es positivo, tenemos:

$$f'(1)>0$$

$$f'(8)<0$$



Hay un máximo relativo en el punto $(7, 6'42)$, `por tanto las ganancias máximas de la empresa se alcanzan a los 7 años y son de $6'42$ millones de euros. A medida que aumenta el número de años $(x\to\infty)$, las ganancias tienden a estabilizarse en 5 millones de euros ya que hay una asíntota horizontal en $y=5$.



4)

a) $p(A/B)=1=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \qquad 1=\dfrac{p(A\cap B)}{0'2} \quad \Rightarrow \quad p(A\cap B)=0'2$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0'7+0'2-0'2=0'7$$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \qquad p(B/A)=\frac{0'2}{0'7}=0'285$$

b) Como $p(A/B)\neq p(A)$ los sucesos A y B son dependientes