Septiembre 2007 opción A. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) Llamamos "x" al número de gramos necesarios del complementos A, e "y" al número de gramos necesarios del complemento B.

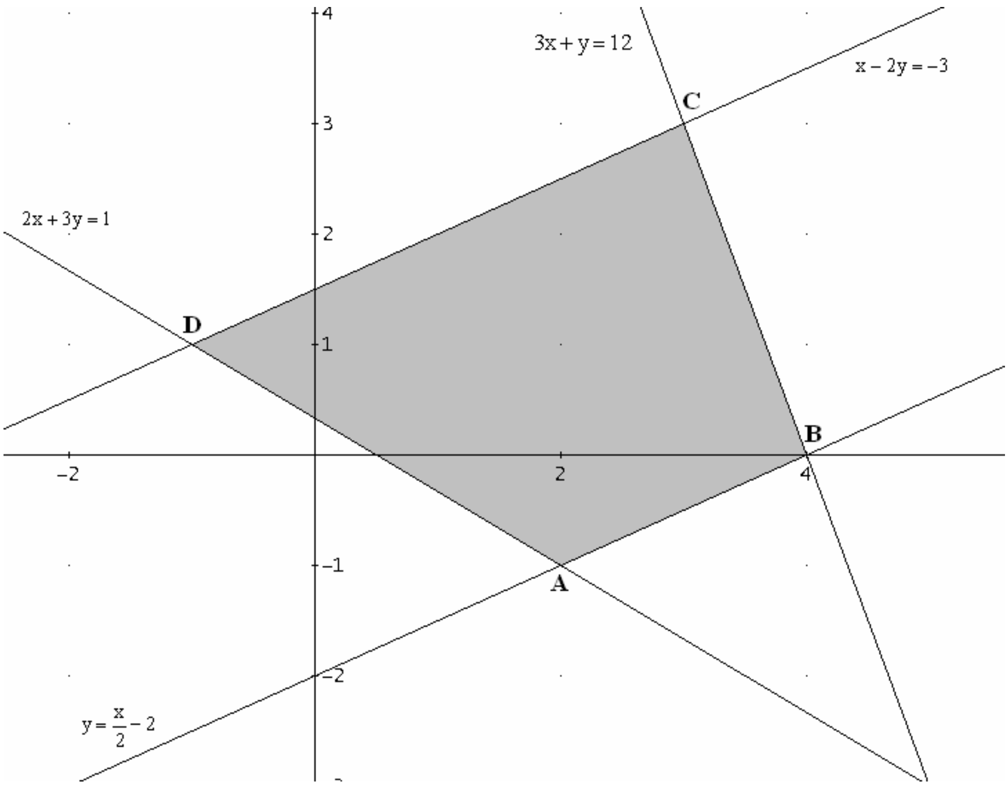
$$\left.\begin{array}{r}2x+2y=12\\3x+y=16\\2x+4y=14\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}2x+2y=12\\3x+y=16\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación comprobamos que se verifica.

$$2\cdot 5+4\cdot 1=14$$

2)

a) $3x+y\le 12 \qquad x-2y\ge -3 \qquad y\ge \frac{x}{2}-2 \qquad 2x+3y\ge 1$



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=1\\y=\dfrac{x}{2}-2\end{array}\right\} \rightarrow A(2,-1) \qquad \left.\begin{array}{r}2x+3y=1\\3x+y=12\end{array}\right\} \rightarrow B(4,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}3x+y=12\\x-2y=-3\end{array}\right\} \rightarrow C(3,3) \qquad \left.\begin{array}{r}2x+3y=1\\x-2y=-3\end{array}\right\} \rightarrow D(-1,1)$$

b) La función objetivo es $f(x,y)=3x-2y$. Sustituyendo A, B y C en la función objetivo obtenemos:

$$F(2,-1)=3\cdot 2-2\cdot(-1)=8 \qquad F(4,0)=3\cdot 4-2\cdot 0=12$$

$$F(3,3)=3\cdot 3-2\cdot 3=3 \qquad\qquad F(-1,1)=3\cdot(-1)-2\cdot 1=-5$$

El máximo se alcanza en el punto B y su valor es 12 y el mínimo se alcanza en el punto D y su valor es -5.

3) a) Como en cada subintervalo hay una función polinómica, en ellos la función es continua.

Estudiamos la continuidad en el intervalo $[0,8]$.

<u>En $x=2$</u>

$$f(2)=4$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+12)=4\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

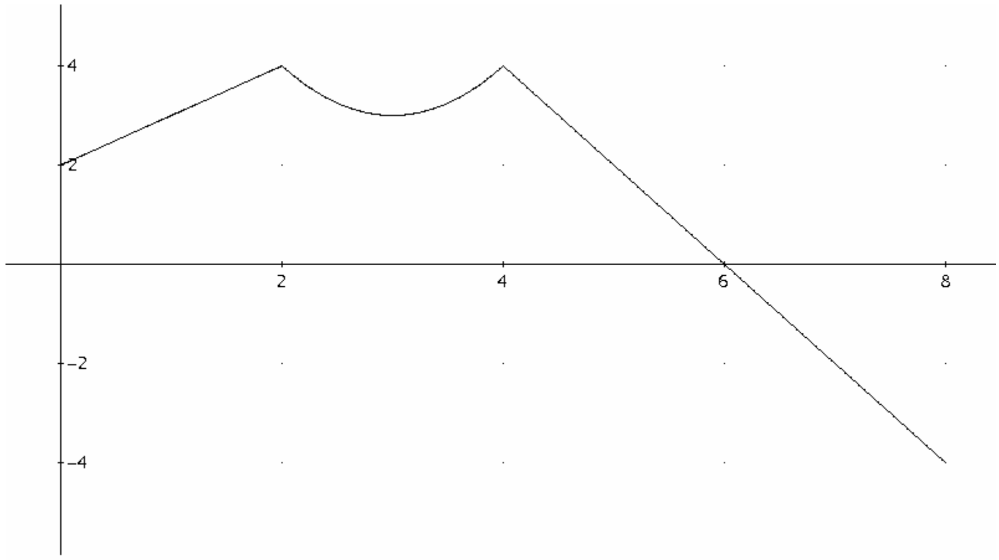
Como $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ la función es continua en $x=2$.

<u>En $x=4$</u>

$$f(4)=4^2-6\cdot 4+12=4$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}(x^2-6x+12)=4\\ \lim\limits_{x\to 4^+}(-2x+a)=-8+a\end{array}\right\} \qquad 4=-8+a \Rightarrow a=12$$

En el intervalo $[0,8]$ la función queda definida como $f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x<2\\ x^2-6x+12 & 2\le x\le 4\\ -2x+12 & 4<x\le 8\end{cases}$



b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos tenemos que comparar el valor que toma la función en los extremos del intervalo $[0,4]$ con los que toma en $x=2$ (límites laterales) y en los puntos singulares (puntos de derivada nula).

En los extremos del intervalo obtenemos: $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(4)=4 \end{cases}$

En $x=2 \ \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+12)=4 \end{cases}$

Calculamos la función derivada en $]0,4[$ $\quad f'(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<2 \\ 2x-6 & 2<x\le 4 \end{cases}$

Igualamos a cero la derivada en cada uno de los intervalos.

En $x\in\,]0,2[\ \Rightarrow\ 1\neq 0$, por tanto no existe ningún punto con derivada nula en dicho intervalo.

En $x\in\,]2,4[\ \rightarrow\ 2x-6=0\ \rightarrow\ x=3\ \Rightarrow\ f(3)=3^2-6\cdot 3+12=3$

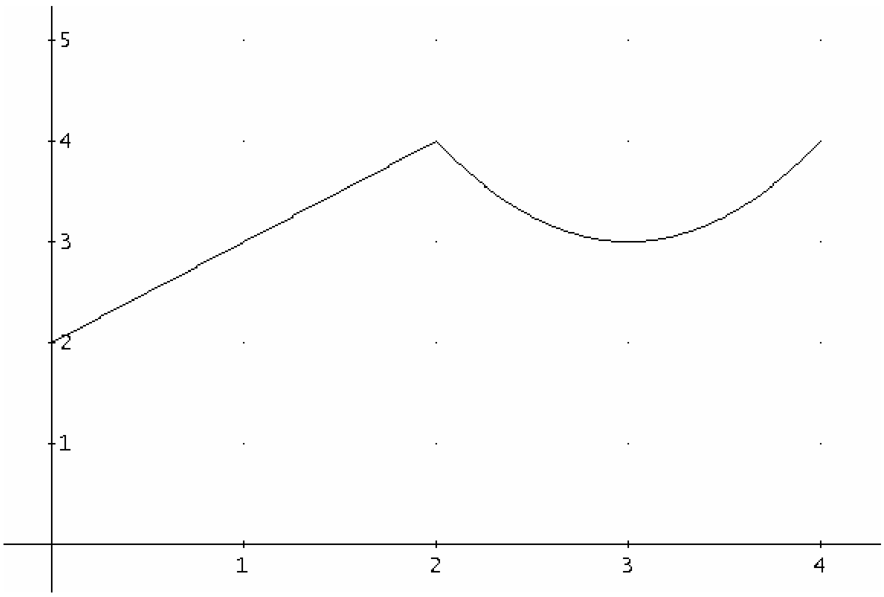
Como $f''(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<2 \\ 2 & 2<x\le 4 \end{cases} \rightarrow\ f''(3)=2>0\ \Rightarrow\ x=3$ es mínimo relativo

Comparando todas las ordenadas obtenidas deducimos que:

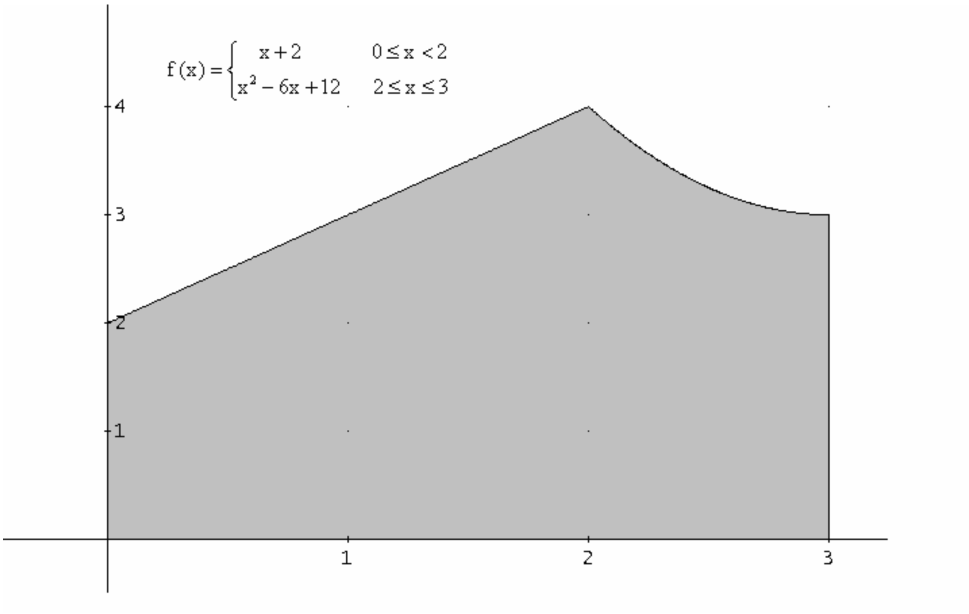
El máximo absoluto se encuentra en $x=2$ ó $x=4$ y su valor es 4.

El mínimo absoluto se encuentra en $x=0$ y su valor es 2.

Todo lo anterior queda reflejado en la siguiente gráfica:



c)



$$A=\int_0^2 (x+2)\,dx+\int_2^3 (x^2-6x+12)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_2^3=$$

$$2+4-0+9-27+36-\left(\frac{8}{3}-12+24\right)=24-\frac{44}{3}=\frac{28}{3}u^2$$

4)

a) Dos sucesos son independientes si se verifica que $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$

Sabemos que para dos sucesos cualesquiera se verifica:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \qquad 0'7=0'4+0'6-p(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad p(A\cap B)=0'3$$

$$0'3\neq 0'4\cdot 0'6 \qquad\qquad 0'3\neq 0'24$$

b) $p(A\cap \overline{B})=p(A)-p(A\cap B)=0'4-0'3=0'1$

c) $p(\overline{A}\cap \overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-0'7=0'3$

Septiembre 2007 opción B. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=-1\\ 2x-y+z&=0\\ -2x+7y+z&=-4\end{aligned}\right\}$ Aplicando el método de Gauss tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ -2 & 7 & 1 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & 3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & 3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Eliminando la última ecuación obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=-1\\ -3y-z&=2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{z=\lambda}\left.\begin{aligned} x+y&=-1-\lambda\\ -3y&=2+\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-1-2\lambda}{3}\\ y=\dfrac{-2-\lambda}{3}\\ z=\lambda\end{cases}\qquad\left(\frac{-1-2\lambda}{3},\frac{-2-\lambda}{3},\lambda\right)$$

Hay infinitas soluciones correspondientes a los distintos valores de λ.

2)

a) $2x-3=0 \quad x=\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad D[f(x)]=\forall x\in R-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Cortes con OX $\to$ $y=0$ $\quad \dfrac{x^2+4}{2x-3}=0 \quad x^2+4=0 \quad x=\pm\sqrt{-4}$ No corta al eje OX.

Corte con OY $\to$ $x=0$ $\quad y=\dfrac{4}{-3} \quad P\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$

b) Asíntotas verticales

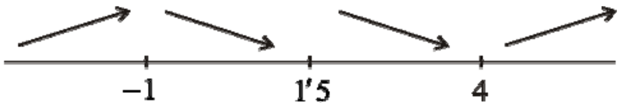
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\frac{x^2+4}{2x-3}&=-\infty\\ \lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{x^2+4}{2x-3}&=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{2x-3}&=-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{2x-3}&=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales}$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x\,(2x-3)-(x^2+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}$ $\qquad 2x^2-6x-8=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$

$f'(-2)>0$
$f'(0)<0$
$f'(2)<0$
$f'(5)>0$



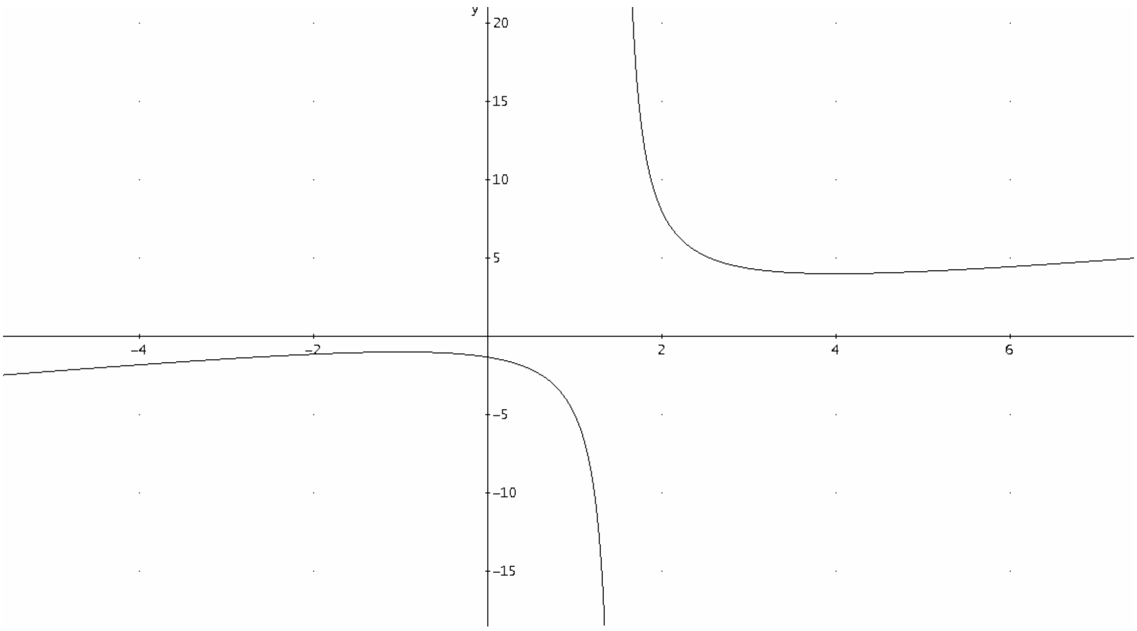
La función es creciente $\forall x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]4,\infty\right[$

La función es decreciente $\forall x\in \left]-1,1'5\right[\cup\left]1'5,4\right[$

d) Máximo relativo en el punto $\left(-1,f(-1)\right) \;\rightarrow\; P(-1,-1)$

Mínimo relativo en el punto $\left(4,f(4)\right) \;\rightarrow\; P(4,4)$

e)



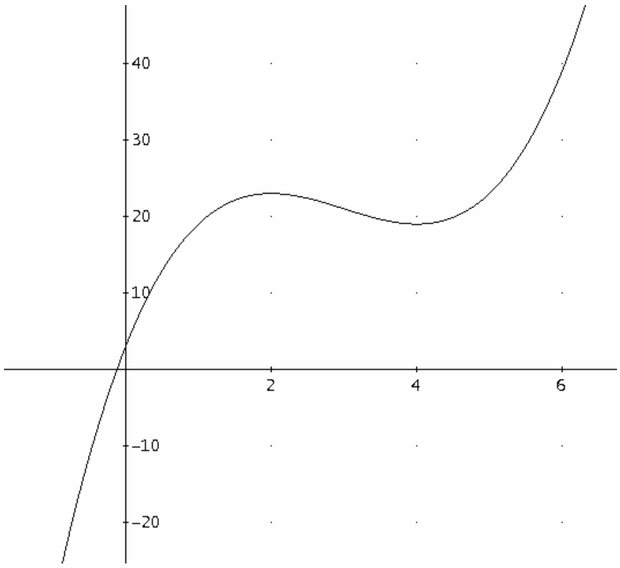
3)

a) Calculamos los puntos singulares.

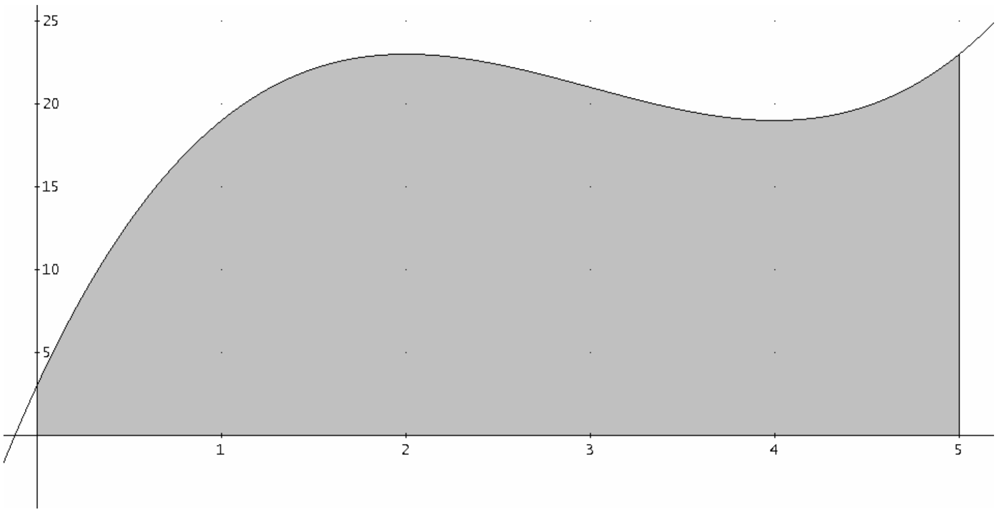
$$f'(x)=3x^2-18x+24=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

$f''(x)=6x-18 \;\rightarrow\; \begin{cases} f''(2)=-6<0 \\ f''(4)=6>0 \end{cases}$ En $x=2$ hay un máximo relativo, y en $x=4$ hay un mínimo relativo

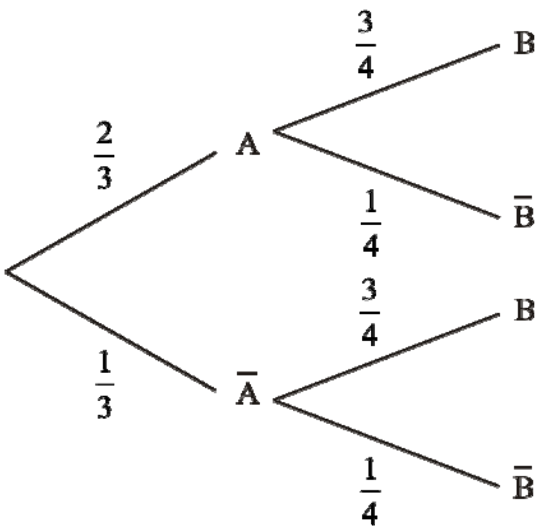
Hay un máximo relativo en el punto $(2,23)$ y hay un mínimo relativo en el punto $(4,19)$ como se observa en la gráfica siguiente:



b) $A=\int_0^5 (x^3-9x^2+24x+3)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+12x^2+3x\right]_0^5=96'25\,u^2$



4) Sean A el suceso correspondiente a que acierte un tirador y B el suceso correspondiente a que acierte el otro tirador.



a) La probabilidad de que los dos acierten es: $p(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

b) La probabilidad de que uno acierte y otro no es: $p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) La probabilidad de que ninguno acierte es: $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) La probabilidad de que alguno acierte es: $1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

e) Sumar las probabilidades de a), b) y c) justificando la suma obtenida.

$\frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$ Se trata del suceso seguro