Septiembre 2006 opción A. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) $AB + A = 2B^t \qquad A(B+I) = 2B^t \qquad A(B+I)(B+I)^{-1} = 2B^t(B+I)^{-1} \qquad A = 2B^t(B+I)^{-1}$

$$B+I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (B+I)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2B^t(B+I)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

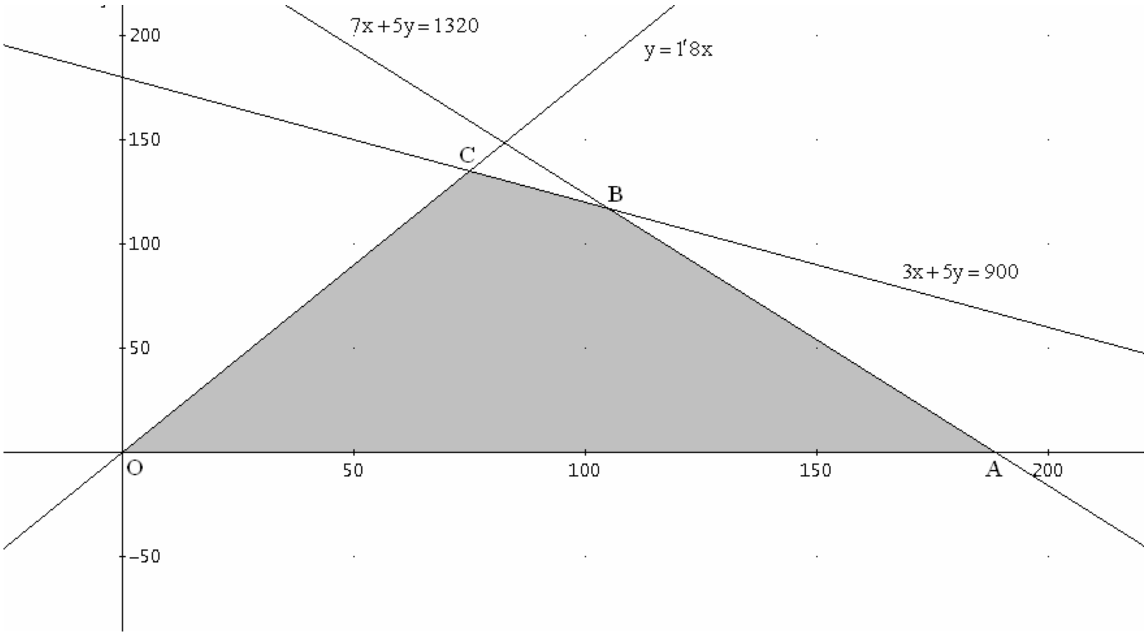
2) Llamamos “x” al nº de litros producidos de whisky 1 e “y” al nº de litros de whisky 2.

	Litros	Malta A	Malta B	Ingresos
Whisky 1	x	$0'7x$	$0'3x$	$12x$
Whisky 2	y	$0'5y$	$0'5y$	$16y$
Disponible		132	90	

La función objetivo a maximizar es: $F(x,y) = 12x + 16y$ con las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 0'7x + 0'5y \le 132 \\ 0'3x + 0'5y \le 90 \\ y \le x + 0'8x \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 7x + 5y \le 1320 \\ 3x + 5y \le 900 \\ y \le 1'8x \end{array}\right\}$$

Representamos gráficamente las rectas $\quad 7x + 5y = 1320 \qquad 3x + 5y = 900 \qquad y = 1'8x$



Calculamos los puntos de cortes de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$O(0,0) \qquad A(188'57,0) \qquad \left.\begin{aligned} 7x+5y&=1320 \\ 3x+5y&=900 \end{aligned}\right\} \rightarrow B(105,117)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y&=900 \\ y&=1'8x \end{aligned}\right\} \rightarrow C(75,135)$$

Sustituyendo A, B y C en la función objetivo obtenemos:

$$F(188'57,0)=12\cdot 188'57+16\cdot 0=2262'84 \qquad F(105,117)=12\cdot 105+16\cdot 117=3132$$

$$F(75,135)=12\cdot 75+16\cdot 135=3060$$

El máximo se alcanza en el punto B y por tanto la destilería debe fabricar 105 litros de whisky del tipo 1y 117 litros de whisky del tipo 2, con unos ingresos de 3132 €.

3) a)

<u>En $x=-1$</u>

$$f(-1)=-a+2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a\\ \lim\limits_{x\to -1^+}(ax+2)=-a+2\end{array}\right\} \rightarrow\ -3+a=-a+2 \ \Rightarrow\ a=2'5$$

Para que exista el límite en el punto $x=-1$ el valor de “a” debe de ser $a=2'5$.

b) Si $a=0$ $\quad f(x)=\begin{cases} 3x & x<-1\\ 2 & -1\le x<1\\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1\end{cases}$

<u>En $x=-1$</u>

$$f(-1)=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}3x=-3\\ \lim\limits_{x\to -1^+}2=2\end{array}\right\} \rightarrow\ -3\ne 2 \ \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

<u>En $x=1$</u>

$$f(1)=4'5$$

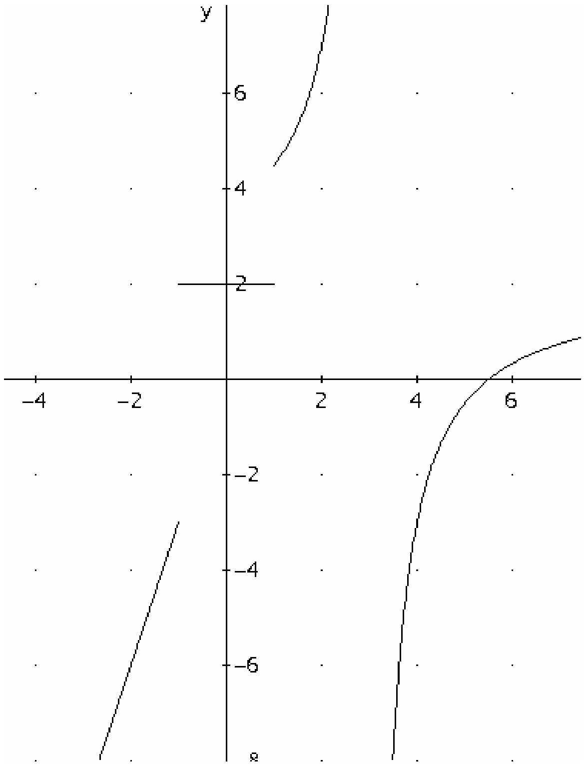
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +1^-}2=2\\ \lim\limits_{x\to +1^+}\dfrac{2x-11}{x-3}=4'5\end{array}\right\} \rightarrow\ 2\ne 4'5 \ \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to +1} f(x)$$

<u>En $x=3$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +3^-}\dfrac{2x-11}{x-3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +3^+}\dfrac{2x-11}{x-3}=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to +1} f(x)$$

<u>*Conclusión*</u>

La función es continua $\forall x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,3\right[\cup\left]3,\infty\right[$. En $x=-1$ y $x=1$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito, y en $x=3$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Todo lo anterior queda reflejado en la gráfica siguiente:



c) $\int_{-2}^{2}(x^3-2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x\right]_{-2}^{2}=4-4-(4+4)=-8$

4) Sea M el suceso sintonizar la cadena Music y R el suceso sintonizar la cadena Rhythm.

Conocemos los sucesos $p(M)=0'35$ $\quad p(\overline{M})=0'65$ $\quad p(M\cap R)=0'1$ $\quad p(\overline{M}\cap\overline{R})=0'55$

Con los datos anteriores podemos construir la siguiente tabla de contingencia

	M	$\overline{M}$	
R	$0'1$		
$\overline{R}$		$0'55$	
	$0'35$	$0'65$	1

$\rightarrow$

	M	$\overline{M}$	
R	$0'1$	$0'1$	$0'2$
$\overline{R}$	$0'25$	$0'55$	$0'8$
	$0'35$	$0'65$	1

Con los datos anteriores tenemos:

a) $p(R)=0'2$

b) $p(R\cap\overline{M})=0'1$

c) $p(M/R)=\frac{p(M\cap R)}{p(R)}=\frac{0'1}{0'2}=0'5$

Septiembre 2006 opción B. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) Llamamos "x" al número de alumnos del grupo A, "y" al número de alumnos del grupo B y "z" al número de alumnos del grupo C. Con los datos del problema podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ \frac{x}{2}+\frac{4}{5}y+\frac{2}{3}z=42 \\ \frac{3}{4}x+y+\frac{2}{3}z=52 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ 15x+24y+20z=1260 \\ 9x+12y+8z=624 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=20 \\ z=21 \end{array}\right.$$

Es decir, hay 24 alumnos del grupo A, 20 del grupo B y 21 del grupo C.

2)

a) El denominador es siempre positivo, por tanto $D[f(x)]=\forall x\in R$

Cortes con OX $\rightarrow$ $y=0$ $\quad \frac{2x}{x^2+1}=0 \quad 2x=0 \quad x=0 \qquad P(0,0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $x=0$ $\quad y=\frac{0}{0+1}=0 \quad y=0 \qquad P(0,0)$

b) No hay asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0 \Rightarrow \text{ } y=0 \text{ es una asíntota horizontal}$$

c) $f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \qquad -2x^2+2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

$f'(-2)<0$
$f'(0)>0$
$f'(2)<0$

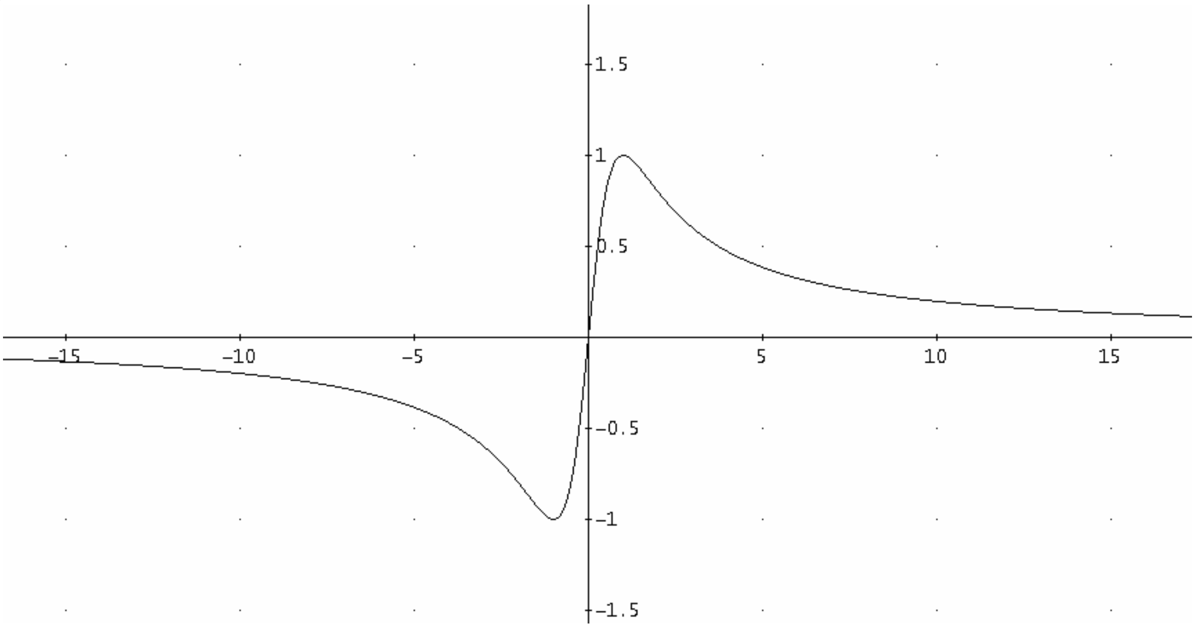
La función es decreciente $\forall x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,\infty\right[$

La función es creciente $\forall x\in\left]-1,1\right[$

d) Máximo relativo en el punto $(1,f(1)) \rightarrow P(1,1)$

Mínimo relativo en el punto $(-1,f(-1)) \rightarrow P(-1,1)$

e)



3) El dominio es $\forall t \in [0,6]$.

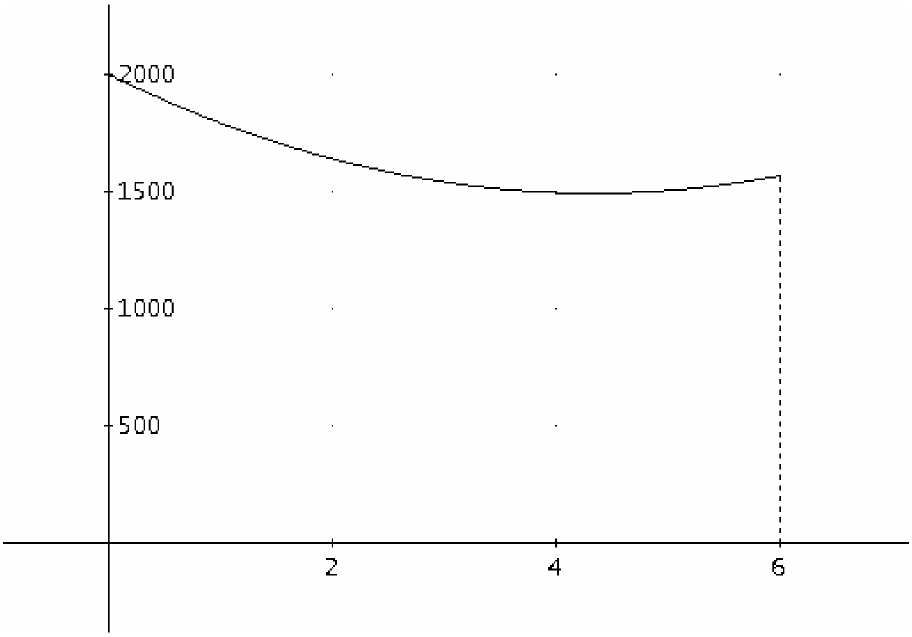
$C'(t) = -234 + 54t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{13}{3} \qquad\qquad C''(t) = 54 > 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{13}{3}$ es mínimo relativo.

Calculamos el valor que toma la función en dicho punto y en los extremos del intervalo.

$$C\left(\frac{13}{3}\right) = 1493\,€ \qquad C(0) = 2000\,€ \qquad C(6) = 1568\,€$$

a) El máximo absoluto se produce para $t = 0$ (cuando abre al público) y es de 2000 €.

b) El mínimo absoluto se produce al cabo de $t = \dfrac{13}{3}$ horas y es de 1493 €.



4) Sean A y B los dos sucesos aleatorios independientes.

La probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es: $p(A \cap B) = \frac{3}{25}$

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos es: $p(A \cup B) = \frac{17}{25}$

Como los sucesos son independientes se verifica: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{25}$

Por otra parte sabemos que para todo par de sucesos A y B se verifica:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{17}{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{25} \\ p(A) + p(B) - \frac{3}{25} = \frac{17}{25} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{25} \\ p(A) + p(B) = \frac{20}{25} \end{array}\right\}$$

$$25[p(B)]^2 - 20\,p(B) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p(B) = \frac{3}{5} \\ p(B) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Si $p(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{5}$ y si $p(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow p(A) = \frac{3}{5}$