Junio 2010

OPCIÓN A

Problema 1

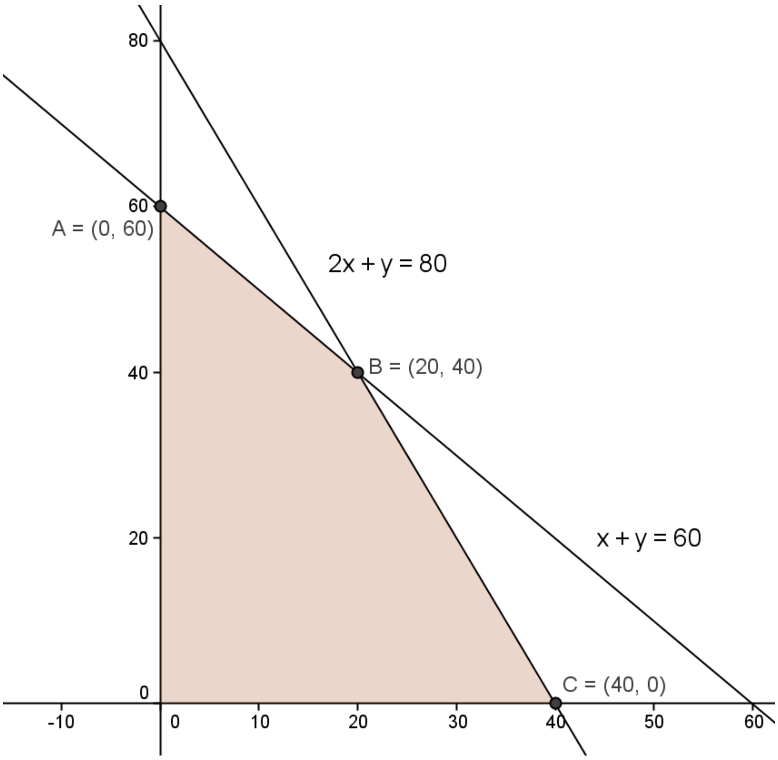
Sea "x" el tipo de ensaimadas grandes e "y" el tipo de ensaimadas pequeñas. Teniendo en cuenta los datos del problema podemos construir la siguiente tabla:

	Grandes (x)	Pequeñas (y)	
Masa	500 gr	250 gr	20000
Relleno	250 gr	250 gr	15000

La función objetivo a maximizar es: $B(x,y) = 2x + 1'5y$ con las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 500x + 250y \le 20000 \\ 250x + 250y \le 15000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y \le 80 \\ x + y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos gráficamente las rectas $2x + y = 80$ $x + y = 60$



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$A(0,60) \qquad \left.\begin{array}{r} 2x + y = 80 \\ x + y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow B(20,40) \qquad C(40,0)$$

Sustituyendo A, B y C en la función objetivo $B(x,y) = 2x + 1'5y$ obtenemos:

$$A(0,60) \rightarrow B(0,60) = 2\cdot 0 + 1'5\cdot 60 = 90\text{ €}$$

$$B(20,40) \rightarrow B(20,40) = 2\cdot 20 + 1'5\cdot 40 = 100\text{ €}$$

$$C(40,0) \rightarrow B(40,0) = 2\cdot 40 + 1'5\cdot 0 = 80\text{ €}$$

El máximo se alcanza en el punto B, por tanto el horno tiene que fabricar 20 ensaimadas grandes y 40 pequeñas para obtener un beneficio máximo de 100 €.

Problema 2

a) Dominio $D[f(x)] = \forall x \in R - \{-3,3\}$

Cortes con OX $\rightarrow$ $y = 0$ $\quad \frac{x^2+1}{x^2-9} = 0 \quad x^2 + 1 = 0 \quad x^2 \neq -1 \Rightarrow$ No corta eje de abscisas

Corte con OY $\rightarrow$ $x = 0 \quad y = \frac{1}{-9} = -0'11$. Corta al eje OY en el punto $(0, -0'11)$

b) Ecuaciones de las asíntotas.

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 1 \text{ es una asíntota horizontal}$$

c) Monotonía

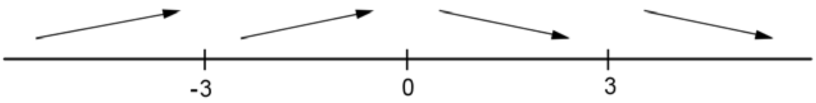
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9) - (x^2+1)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}$$

Igualamos a cero el numerador y el denominador por separado, y con las soluciones obtenidas formamos los intervalos para estudiar la monotonía.

$$-20x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f'(-4)>0 \quad f'(-2)>0$

$f'(1)<0 \qquad f'(4)<0$

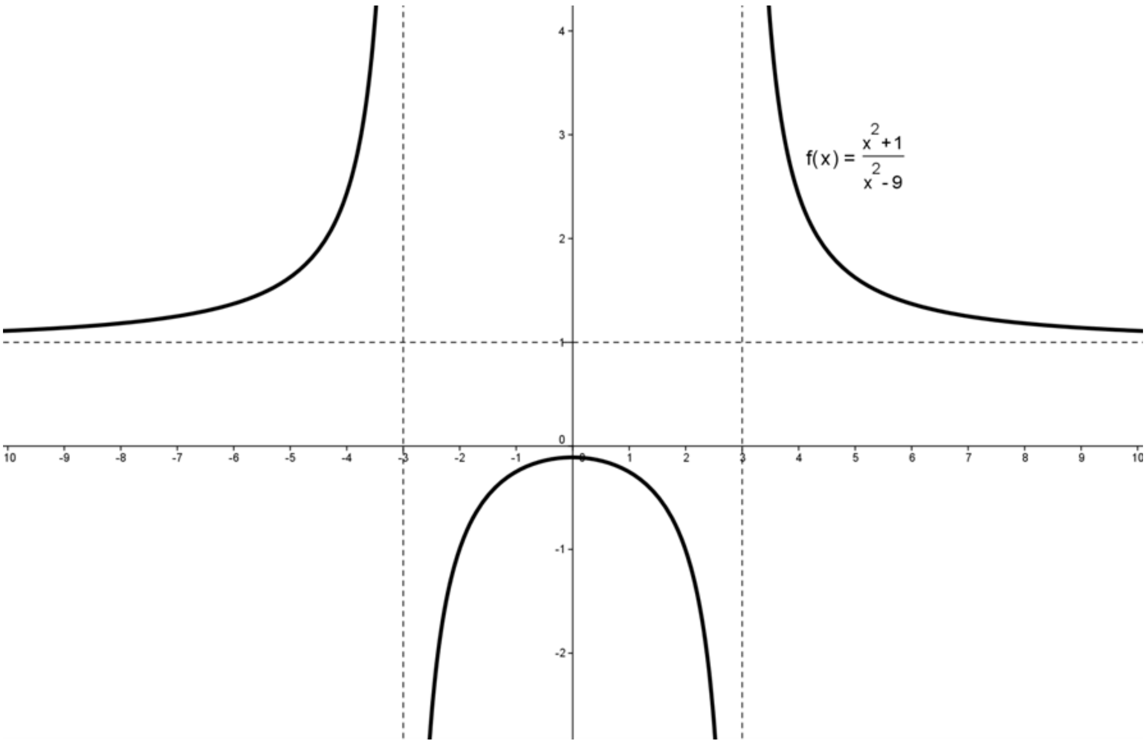


La función es creciente $\forall x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-3,0\right[$

La función es decreciente $\forall x \in \left]0,3\right[\cup \left]3,\infty\right[$

d) Del estudio de la monotonía, y teniendo en cuenta los puntos en los que hay asíntotas verticales se deduce que hay un máximo local en el punto $(0, f(0)) \quad \rightarrow \quad (0, -0'11)$

e)



Problema 3

a) Sabemos que

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \quad \rightarrow \quad 0'9=\frac{p(A\cap B)}{0'1} \quad \Rightarrow \quad p(A\cap B)=0'9\cdot 0'1=0'09$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \quad \rightarrow \quad 0'2=\frac{0'09}{p(B)} \quad \Rightarrow \quad p(B)=\frac{0'09}{0'2}=0'45$$

b) $\left.\begin{array}{r} p(A/B)=0'2 \\ p(A)=0'1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p(A/B)\neq p(A)$ Los sucesos son Dependientes

c) $p(A\cup\overline{B})=p(A)+p(\overline{B})-p(A\cap\overline{B})=p(A)+1-p(B)-\left[p(A)-p(A\cap B)\right]$

$$p(A\cup\overline{B})=0'1+1-0'45-\left[0'1-0'09\right]=0'55+0'09=0'64$$

OPCIÓN B

Problema 1

$$2\begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad 2\begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AX=B$ $\quad A^{-1}AX=A^{-1}B$ $\quad X=A^{-1}B$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2\\-1&-3\end{vmatrix}=-4 \qquad \operatorname{Adj}A=\begin{pmatrix}-3&1\\-2&2\end{pmatrix} \qquad [\operatorname{Adj}A]^t=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[\operatorname{Adj}A]^t}{|A|}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&-2\\1&2\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&-2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Problema 2

a) Los tres intervalos corresponden a funciones polinómicas que sabemos que son continuas. Vamos a estudiar la continuidad en los extremos de cada uno de los intervalos.

$$f(t)=\begin{cases}5-0'1t & 0\le t<5\\ 4'5+0'05(t-5) & 5\le t<10\\ 4'75+0'1(t-10)^2 & 10\le t\le 13\end{cases}$$

Continuidad en $t=5$

$f(5)=4'5+0'05\cdot 0=4'5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 5^-}(5-0'1t)=4'5\\ \lim\limits_{t\to 5^+}[4'5+0'05(t-5)]=4'5\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{t\to 5} f(t)=4'5$$

Como $f(5)=\lim\limits_{t\to 5} f(t)=4'5$ la función $f(t)$ es continua en $t=5$.

Continuidad en $t=10$

$f(10)=4'75+0'1\cdot 0=4'75$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 10^-}\left[4'5+0'05(t-5)\right]=4'75\\ \lim\limits_{t\to 10^+}\left[4'75+0'1(t-10)^2\right]=4'75\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \lim\limits_{t\to 10} f(t)=4'75$$

Como $f(10)=\lim\limits_{t\to 10} f(t)=4'75$ la función $f(t)$ es continua en $t=10$.

La función $f(t)$ es continua $\forall t\in[0,13]$.

b) Calculamos el valor de la función en los extremos de los intervalos y calculamos los puntos del intervalo $[0,13]$ en los que la derivada se anula.

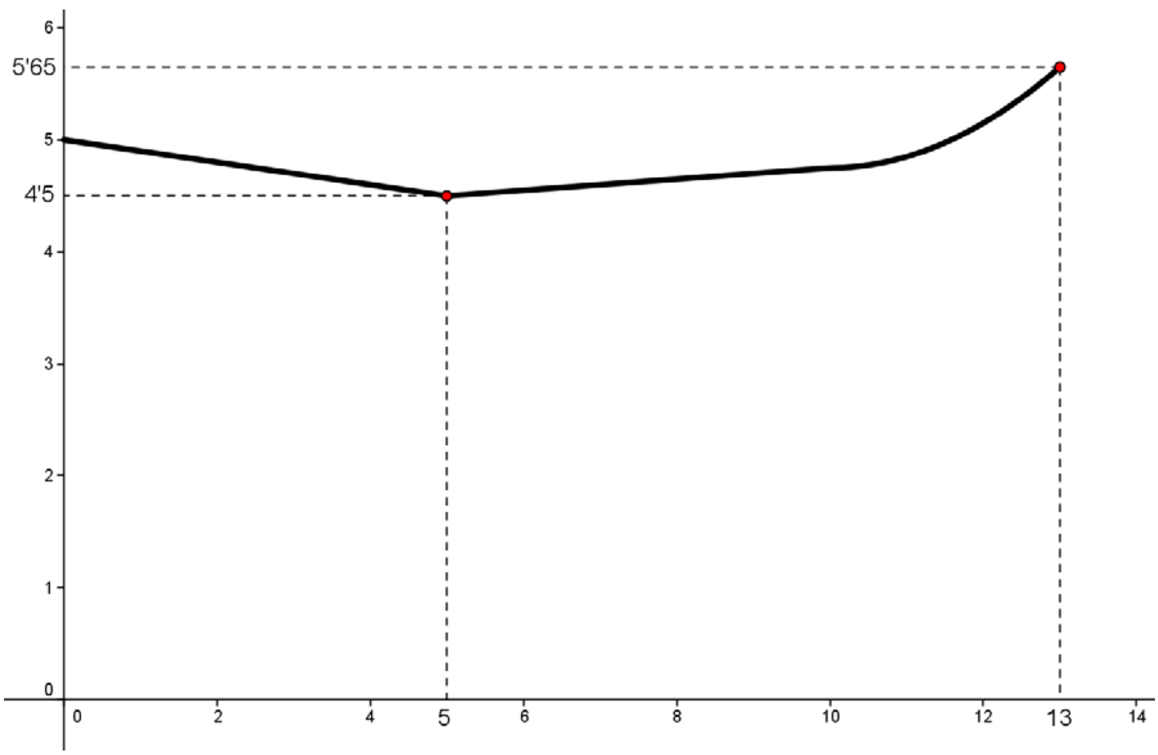
En el intervalo $\left[0,5\right[$ se verifica $\begin{cases} f(0)=5\\ f'(t)=-0'1\neq 0\end{cases}$

En el intervalo $\left[5,10\right[$ se verifica $\begin{cases} f(5)=4'5\\ f'(t)=0'05\neq 0\end{cases}$

En el intervalo $\left[10,13\right]$ se verifica $\begin{cases} f(10)=4'75\\ f(13)=5'65\\ f'(t)=0'2(t-10)=0 \quad\rightarrow\quad t=10\end{cases}$

De todo lo anterior deducimos que la valoración de la empresa es máxima para $t=13$ años y su valoración es de $5'65$ millones de euros.

c) La valoración de la empresa es mínima para $t=5$ años y su valoración es de $4'5$ millones de euros.

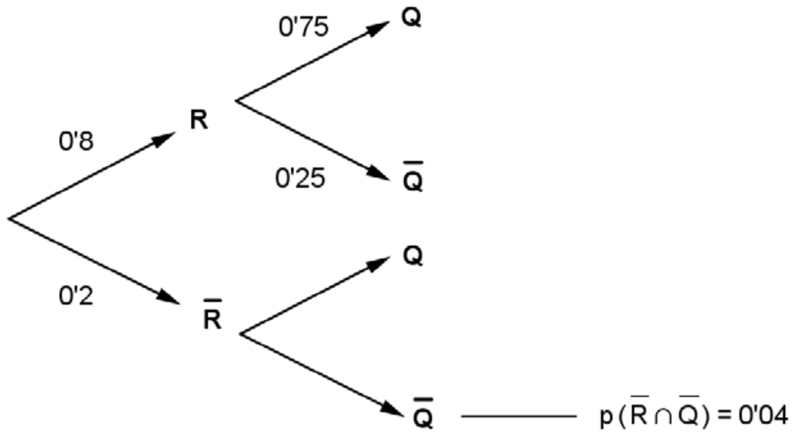


Problema 3

Sea "R" el suceso "le gusta el vino Raïm Negre" y sea "Q" el suceso "le gusta el queso de cabra". Conocemos los siguientes datos:

$$p(R)=0'8 \qquad p(\overline{R})=0'2 \qquad p(Q/R)=0'75 \qquad p(\overline{R}\cap\overline{Q})=0'04$$

Dibujamos el diagrama en árbol correspondiente a los datos del problema.

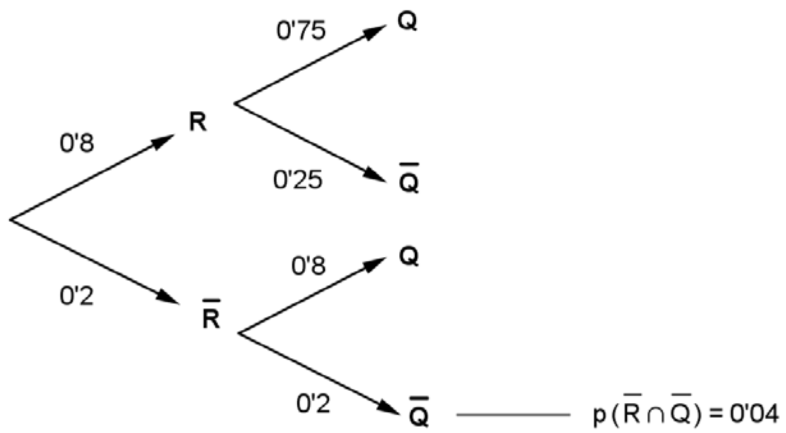


De los datos del problema, reflejados en el diagrama en árbol, deducimos:

$$p(\overline{R})\cdot p(\overline{Q}/\overline{R})=p(\overline{R}\cap\overline{Q}) \qquad 0'2\cdot p(\overline{Q}/\overline{R})=0'04 \;\Rightarrow\; p(\overline{Q}/\overline{R})=\frac{0'04}{0'2}=0'2$$

Por lo tanto $p(Q/\overline{R})=1-p(\overline{Q}/\overline{R})=1-0'2=0'8$

El diagrama completo es:



a) $p(R\cap Q)=0'8\cdot 0'75=0'6$.

Al 60% le gusta tanto el vino Raïm Negre como el queso de cabra.

b) $p(\overline{Q})=p(R\cap\overline{Q})+p(\overline{R}\cap\overline{Q})=0'8\cdot 0'25+0'2\cdot 0'2=0'24$

Al 24% no le gusta el queso de cabra.

c) $p(R/Q)=\dfrac{p(R\cap Q)}{p(Q)}=\dfrac{p(R\cap Q)}{1-p(\overline{Q})}=\dfrac{0'6}{1-0'24}=\dfrac{0'6}{0'76}=0'7894$

La probabilidad de que le guste el vino Raim Negre a un miembro de la sociedad que le gusta el queso de cabra es del $78'94\,\%$

d) $p(R/\overline{Q})=\dfrac{p(R\cap \overline{Q})}{p(\overline{Q})}=\dfrac{0'8\cdot 0'25}{0'24}=\dfrac{0'2}{0'24}=0'8\widehat{3}$

Al $83'33\,\%$ le gusta el vino Raïm Negre de entre aquellos a los que no les gusta el queso de cabra.