Junio 2009

BLOQUE A

Problema A1

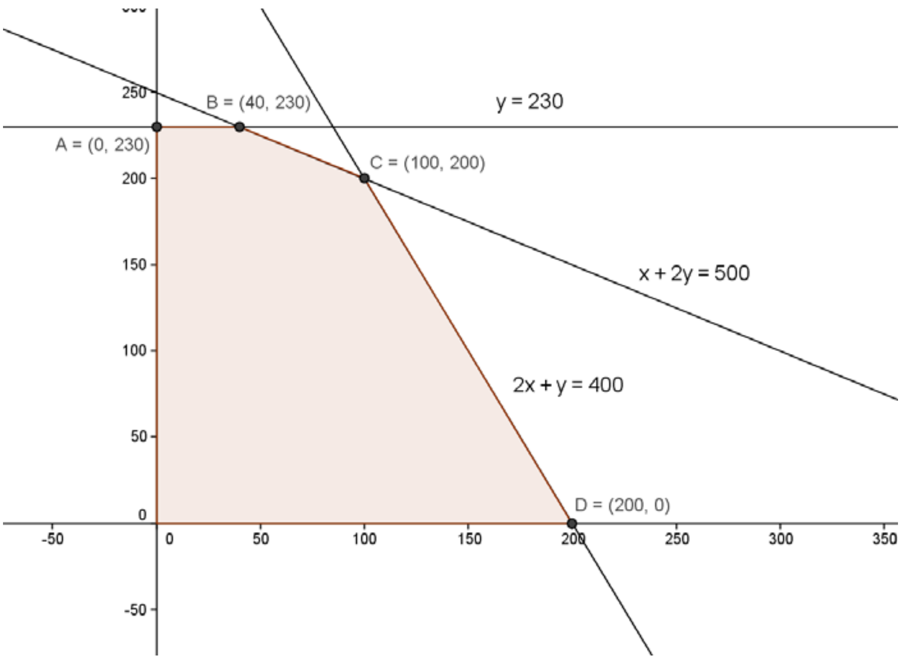
Sea “x” el número de bolsas del tipo A e “y” el número de bolsas del tipo B. Teniendo en cuenta los datos del problema podemos construir la siguiente tabla:

	Cantidad	Naranjas	Manzanas	Peras
Bolsa del tipo A	x	1	2	0
Bolsa del tipo B	y	2	1	1
Total		500	400	230

La función objetivo a maximizar es: $F(x,y) = 2'5x + 3y$ con las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\le 500 \\ 2x + y &\le 400 \\ y &\le 230 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Representamos gráficamente las rectas $x + 2y = 500$ $2x + y = 400$ $y = 230$



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$\mathrm{A}(0,230)$ $\left.\begin{aligned} y &= 230 \\ x + 2y &= 500 \end{aligned}\right\} \to \mathrm{B}(40,230)$ $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 500 \\ 2x + y &= 400 \end{aligned}\right\} \to \mathrm{C}(100,200)$ $\mathrm{D}(200,0)$

Sustituyendo A, B, C y D en la función objetivo obtenemos:

$$F(0,230)=2'5\cdot 0+3\cdot 230=690\,€ \qquad F(40,230)=2'5\cdot 40+3\cdot 230=790\,€$$

$$F(100,200)=2'5\cdot 100+3\cdot 200=850\,€ \qquad F(200,0)=2'5\cdot 200+3\cdot 0=500\,€$$

El máximo se alcanza en el punto C, por lo que hay que preparar 100 bolsas del tipo A y 200 bolsas del tipo B para obtener una ganancia máxima de 850 €.

Problema A2

Aplicando el método de Gauss al sistema de ecuaciones lineales tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ 2x+z=3 \\ x+5y-7z=4 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por lo que podemos eliminarla. El sistema es Compatible e Indeterminado. Las soluciones se obtienen resolviendo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ 2x+z=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=t} \left.\begin{array}{r} x+y=2+t \\ 2x=3-t \end{array}\right\} \Rightarrow \; x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t \quad y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t \quad z=t$$

La solución general es $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t,t\right)$

Si $(x,y,0)$ es una solución, quiere decir que $t=0$, por lo que $x=\frac{3}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$.

BLOQUE B

Problema B1

a) En cada uno de los tres tramos la función es continua ya son funciones polinómicas. Estudiaremos lo que sucede en los puntos $x=-1$ y $x=4$.

Continuidad en $x=-1$

$f(-1)=-1-1=-2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2 \end{array}\right\} \quad \text{Como } \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \;\Rightarrow\; \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

La función presenta en $x=-1$ una discontinuidad de salto finito.

Continuidad en $x=4$

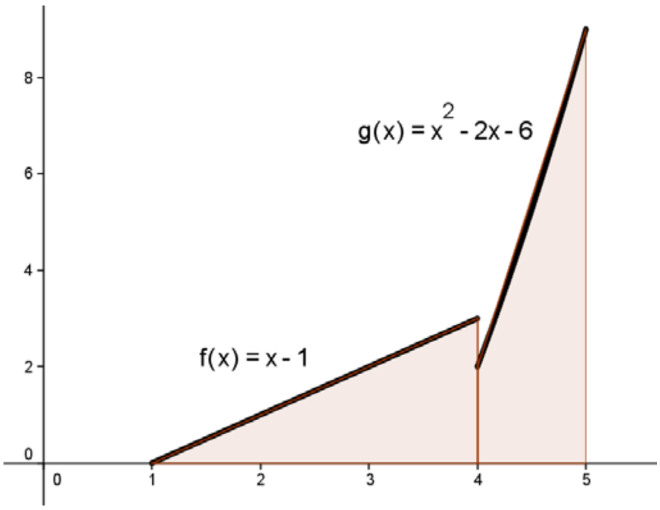
$f(4)=4^2-2\cdot 4-6=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}(x-1)=3\\ \lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-2x-6)=2\end{array}\right\} \quad \text{Como } \lim_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 4} f(x)$$

La función presenta en $x=4$ una discontinuidad de salto finito.

Conclusión: La función es continua $\forall x\in \left]-2,-1\right[\cup\left]-1,4\right[\cup\left]4,6\right[$

b) El área que nos piden es la representada a continuación.



$$\int_1^4 (x-1)\,dx+\int_4^5 (x^2-2x-6)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4+\left[\frac{x^3}{3}-x^2-6x\right]_4^5=$$

$$\frac{4^2}{2}-4-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)+\frac{5^3}{3}-5^2-6\cdot 5-\left(\frac{4^3}{3}-4^2-6\cdot 4\right)=\frac{59}{6}=9'8\widehat{3}\,u^2$$

Problema B2

a) $D[f(x)]=\forall x\in R$, por ser una función polinómica.

Cortes con OX $\rightarrow$ $y=0$ $\quad x^3-6x=0 \quad x(x^2-6)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-\sqrt{6}\\ x=+\sqrt{6}\end{cases}$

Corta al eje de abscisas en los puntos $(0,0),(-\sqrt{6},0)$ y $(\sqrt{6},0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $x=0$ $\quad y=0$. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0,0)$.

b) No tiene asíntotas horizontales ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-6x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-6x)=-\infty$

No tiene asíntotas verticales ya que $\nexists a\in R$ tal que $\lim\limits_{x\to a}(x^3-6x)=\pm\infty$

Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

c) $f'(x)=3x^2-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{cases}$

$f'(-2)>0$

$f'(0)<0$

$f'(2)>0$

La función es creciente $\forall x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},\infty\right[$

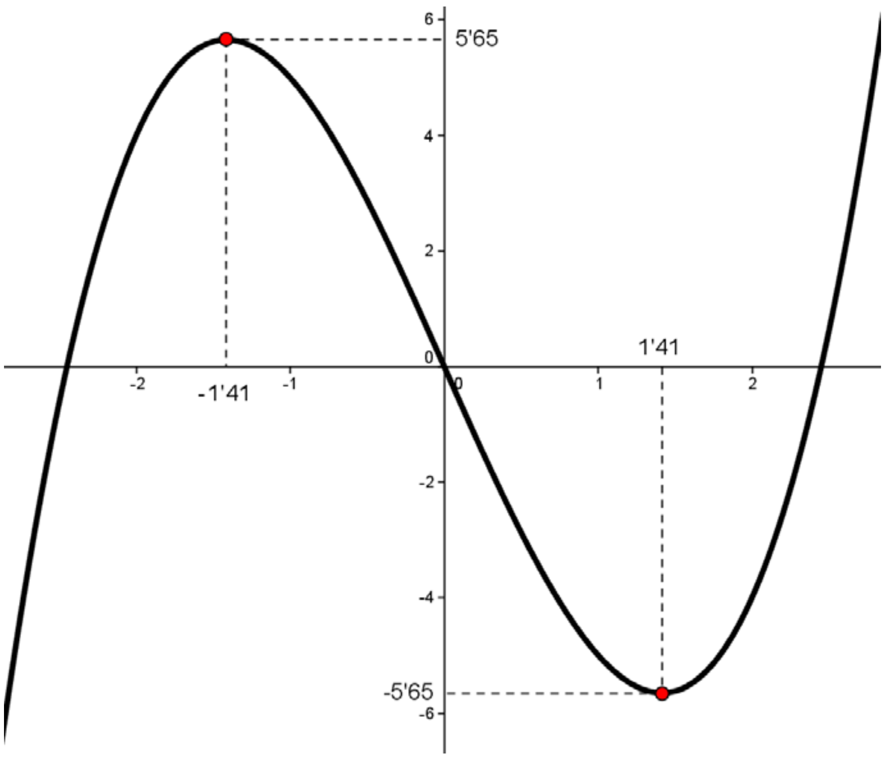
La función es decreciente $\forall x\in\left]-\sqrt{2},+\sqrt{2}\right[$

d) Como se observa en el diagrama anterior en $x=-\sqrt{2}$ hay un máximo relativo y en $x=+\sqrt{2}$ hay un mínimo relativo.

Hay un máximo relativo en el punto $(-\sqrt{2},f(-\sqrt{2})) \;\;\to\;\; (-1'41,5'65)$

Hay un mínimo relativo en el punto $(\sqrt{2},f(\sqrt{2})) \;\;\to\;\; (1'41,-5'65)$

e) La representación gráfica de la función es:



BLOQUE C

Problema C1

Sea “A” el suceso correspondiente al grupo de alumnos de bachillerato que les gusta el grupo musical A y sea “B” el suceso correspondiente al grupo de alumnos de bachillerato que les gusta el grupo musical B. Según los datos del problema tenemos:

$$p(A)=0'2 \qquad p(\overline{A})=0'8 \qquad p(B)=0'5 \qquad p(\overline{B})=0'5 \qquad p(\overline{A}\cap\overline{B})=0'3$$

a) Tenemos que calcular $p(A\cap B$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \quad \Rightarrow \quad p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$$

Sabemos por las Leyes de Morgan que $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A\cup B}\right)$

$$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=0'3 \quad \Rightarrow \quad p(A\cup B)=1-0'3=0'7$$

$$p(A\cap B)=0'2+0'5-0'7=0$$

b) Tenemos que calcular $p(A\cup B)$ y sabemos que $p(A\cup B)=0'7$, como hemos visto en el apartado anterior.

c) Nos piden $p\left(\overline{A}\cap B\right)$ $\qquad p\left(B\cap\overline{A}\right)=p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)=0'5-0=0'5$

Problema C2

Sean los sucesos: “H” ser hombre, “M” ser mujer, “A” gana el candidato A y “B” gana el candidato B. Representando los datos mediante un diagrama en árbol tenemos:

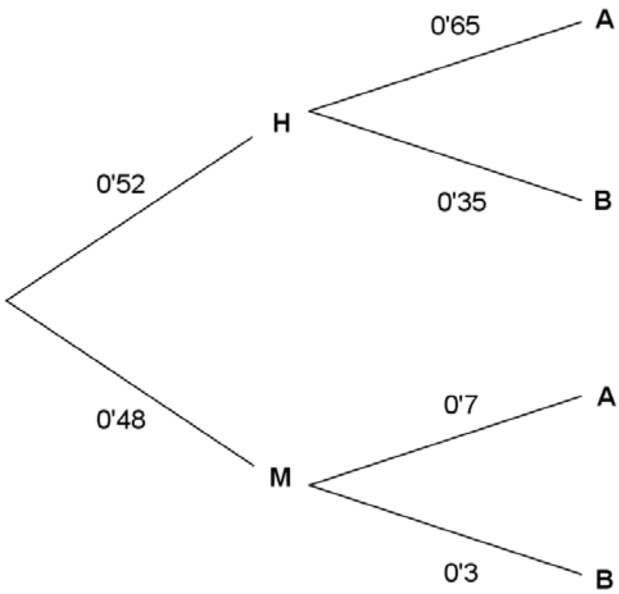
Del enunciado del problema conocemos los siguientes datos:

$$p(H)=0'52 \quad \Rightarrow \quad p(M)=0'48$$

$$p(A/M)=\frac{p(A\cap M)}{p(M)}=0'7$$

$$p(B/H)=\frac{p(B\cap H)}{p(H)}=0'35$$

a) Nos piden calcular $p(M/B)$. Utilizando la fórmula de Bayes tenemos:



$$p(M/B)=\frac{p(M)\cdot p(B/M)}{p(H)\cdot p(B/H)+p(M)\cdot p(B/M)}=\frac{0'48\cdot 0'3}{0'52\cdot 035+0'48\cdot 0'3}=0'4417$$

b) Nos piden calcular $p(M\cup A)$

$$p(M\cup A)=p(M)+p(A)-p(M\cap A)$$

$$p(A)=p(H)\cdot p(A/H)+p(M)\cdot p(A/M) \qquad p(M\cap A)=p(M)\cdot p(A/M)$$

$$p(M\cup A)=p(M)+p(H)\cdot p(A/H)+p(M)\cdot p(A/M)-p(M)\cdot p(A/M)$$

$$p(M\cup A)=p(M)+p(H)\cdot p(A/H)=0'48+0'52\cdot 0'65=0'818$$

BLOQUE D

Problema D1

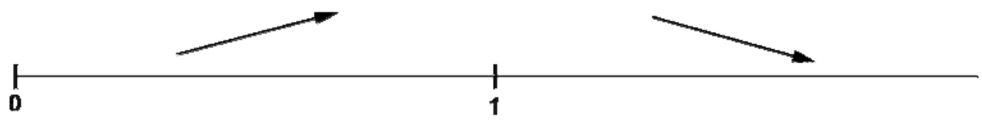
$$f(x)=8'5+\frac{3x}{1+x^2} \qquad x\geq 0$$

a) $f'(x)=0+\dfrac{3(1+x^2)-3x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$$1-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad \text{por ser} \quad x\geq 0$$

$f'(0'5)>0$

$f'(2)<0$



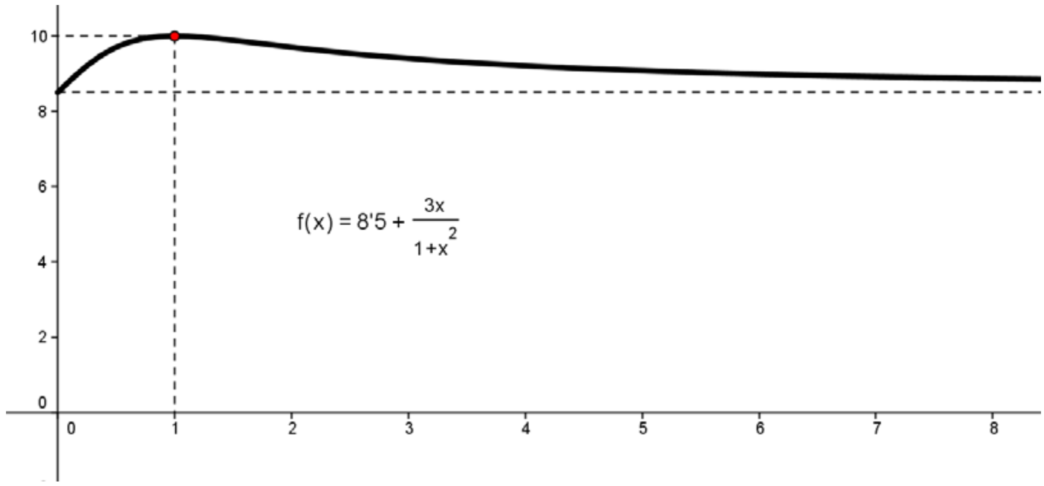
El rendimiento crece $\forall x\in\,]0,1[$ y decrece $\forall x\in\,]1,\infty[$, es decir, crece durante el primer año y decrece a continuación

b) El rendimiento máximo se alcanza al cabo de un año y es de $f(1)=10$, es decir, el punto de rendimiento máximo es:

$$P(1,10)$$

c) Veamos la asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8'5+\dfrac{3x}{1+x^2}\right)=8'5$

Como $f(0)=8'5$ el rendimiento nunca puede ser menor que el que tenía el producto inicialmente.



Problema D2

$f(x) = x^3 - 12x + 7$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 \qquad 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x \qquad f''(-2) = -12 < 0 \qquad f''(2) = 12 > 0$

$f(x)$ tiene un Mínimo relativo en el punto $(2, f(2))$ es decir $(2, -9)$.

$f(x)$ tiene un Máximo relativo en el punto $(-2, f(-2))$ es decir $(-2, 23)$.

b) En el intervalo $]-3,3[$

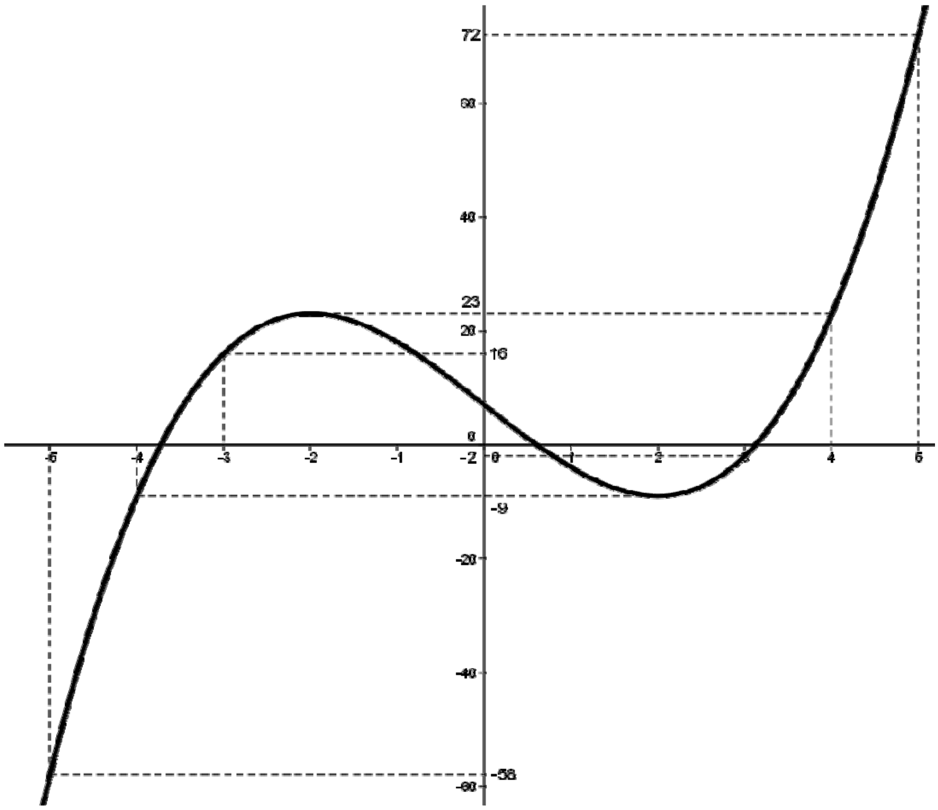
$f(-3) = 16$ y $f(3) = -2$, por tanto el Mínimo absoluto es $(2, -9)$ y el Máximo $(-2, 23)$.

c) En el intervalo $]-4,4[$

$f(-4) = -9$ y $f(4) = 23$, por tanto en $(2, -9)$ y $(-4, -9)$ hay Mínimos absolutos y en $(-2, 23)$ y $(4, 23)$ hay dos Máximos absolutos.

d) En el intervalo $]-5,5[$

$f(-5) = -58$ y $f(5) = 72$, por tanto en $(-5, -58)$ hay un Mínimo absoluto y en $(5, 72)$ hay un Máximo absoluto.


72
60
40
23
20
16
0
-5
-4
-3
-2
-1
-2
0
1
2
3
4
5
-9
-20
-40
-58
-60