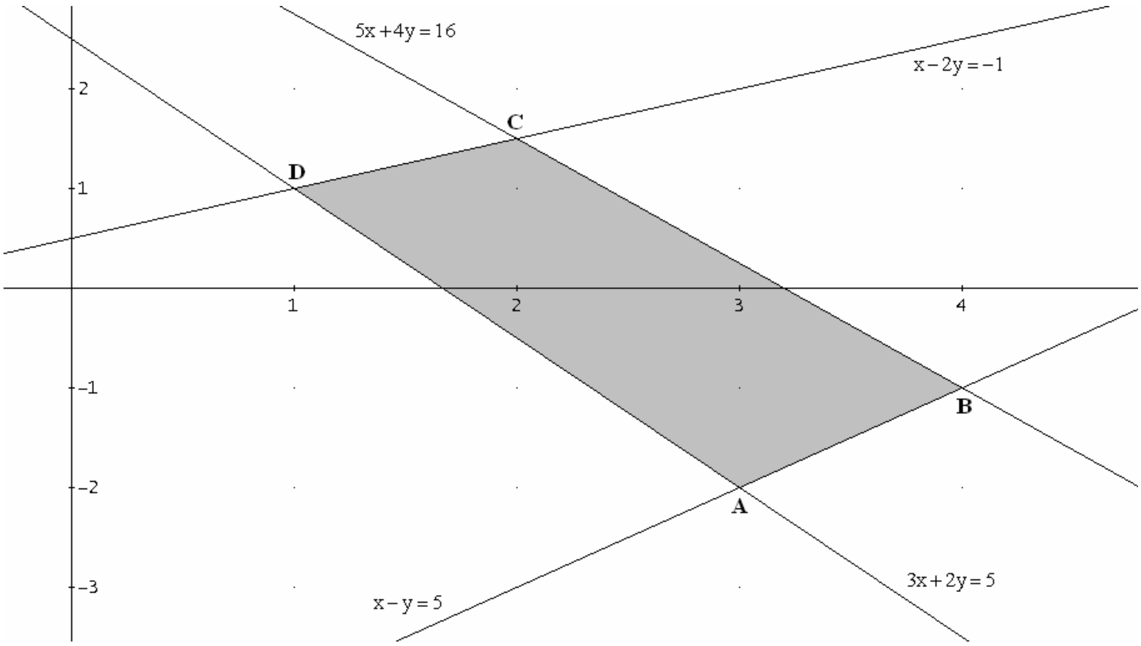
Junio 2008 opción A. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) Sea "x" el número de plazas vendidas en la urbanización A, "y" las plazas vendidas en la urbanización B y "z" las plazas vendidas en la urbanización C.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ x=z+\dfrac{50}{100}z \\ 6000z=2000x+4000y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ x-1'5z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=65 \\ 2x-3z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=15 \\ z=20 \end{array}\right.$$

2)

a) Representamos las rectas: $3x+2y=5$ $\quad x-2y=-1$ $\quad 5x+4y=16$ $\quad x-y=5$



b) Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$\left.\begin{array}{r} x-y=5 \\ 3x+2y=5 \end{array}\right\} \rightarrow A(3,-2) \qquad \left.\begin{array}{r} x-y=5 \\ 5x+4y=16 \end{array}\right\} \rightarrow B(4,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y=16 \\ x-2y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow C(2,1'5) \qquad \left.\begin{array}{r} x-2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{array}\right\} \rightarrow D(1,1)$$

c) La función objetivo es $f(x,y)=3x-y$. Sustituyendo A, B, C y D en la función objetivo obtenemos:

$$F(3,-2)=3\cdot 3-(-2)=11 \qquad F(4,-1)=3\cdot 4-(-1)=13$$

$$F(2,1'5)=3\cdot 2-1'5=4'5 \qquad F(1,1)=3\cdot 1-1=2$$

El mínimo se alcanza en el vértice D y su valor es 2.

3)

a) Calculamos los valores que toma la función $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ en los extremos del intervalo $[1,4]$:

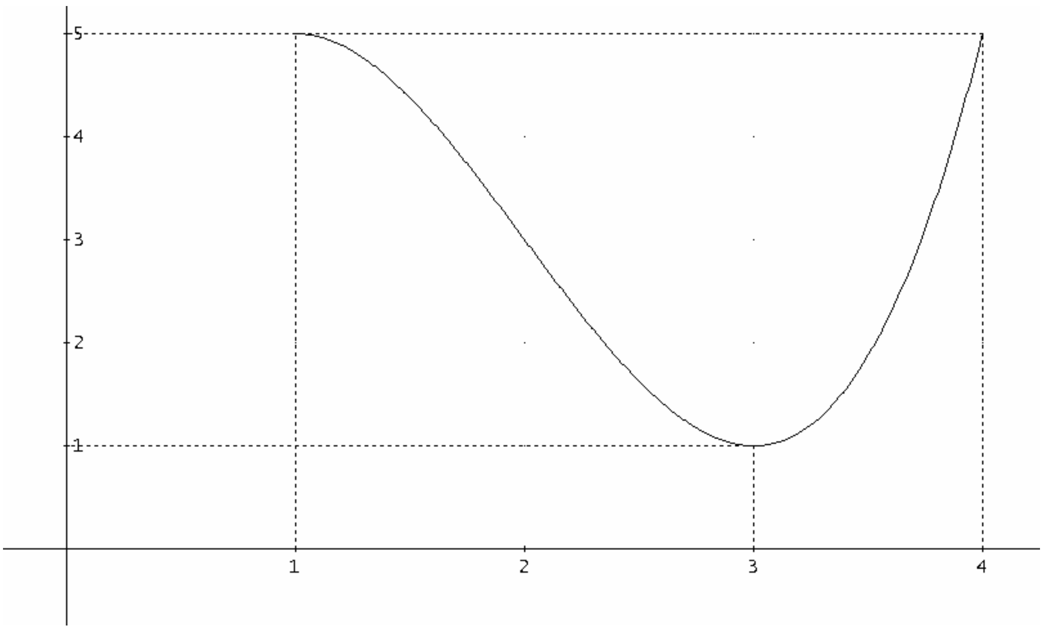
$$f(1)=5 \qquad f(4)=5$$

Calculamos los valores que anulan la derivada en dicho intervalo:

$$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \qquad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Calculamos los valores que toma la función en dichos puntos: $f(1)=5 \qquad f(3)=1$

El máximo valor que toma la función (máximo absoluto) $f(x)$ en el intervalo $[1,4]$ se alcanza en los puntos $(1,5)$ y $(4,5)$, y el mínimo valor para la función (mínimo absoluto) se alcanza en el punto $(3,1)$



b) Como en cada subintervalo hay una función polinómica, en ellos la función es continua.

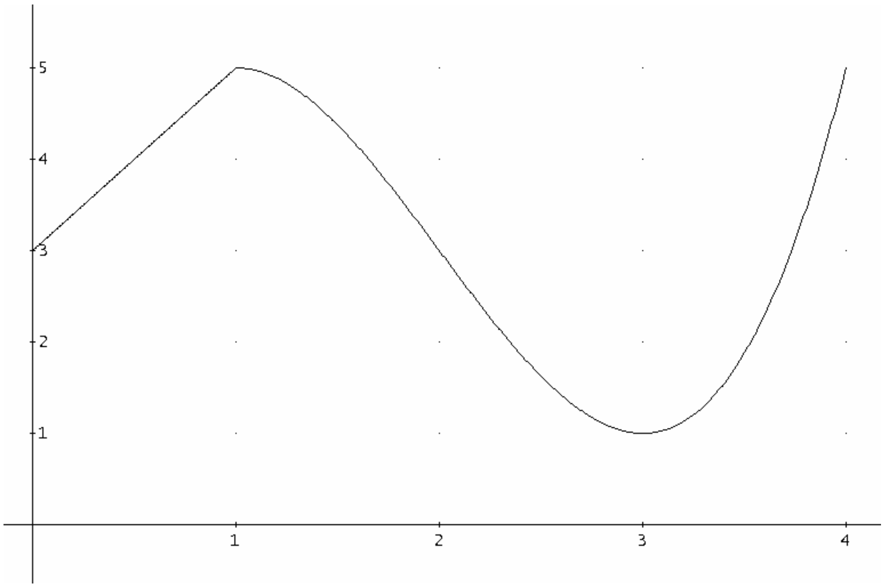
<u>En $x=1$</u>

$$f(1)=5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+3)=5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-6x^2+9x+1)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=5$$

<u>Conclusión</u> La función es continua $\forall x \in [0,4]$.



4) Sabemos que para dos sucesos cualesquiera se verifica:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} 0'7 = p(A) + p(B) - 0'1 \\ 0'2 = \dfrac{0'1}{p(B)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p(A) = 0'3 \\ p(B) = 0'5 \end{cases}$$

b) Dos suceso son independientes si $p(A/B) = p(A)$

Como $p(A/B) = 0'2$ y $p(A) = 0'3$ los sucesos son dependientes.

c) Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos tenemos:

$$p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) + p(B) - [p(B) - p(A \cap B)]$$

$$p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(B) + p(A \cap B) = p(\overline{A}) + p(A \cap B) = 0'7 + 0'1 = 0'8$$

Junio 2008 opción B. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) $A\,X + I = A\,B^t \qquad A\,X = A\,B^t - I \qquad A^{-1}A\,X = A^{-1}(A\,B^t - I) \qquad X = A^{-1}(A\,B^t - I)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2)

a) $4 - x^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad D[f(x)] = \forall x \in R - \{-2, 2\}$

Cortes con OX $\rightarrow$ $y = 0$ $\quad \frac{x^2}{4 - x^2} = 0 \quad x^2 = 0 \quad x = 0$ Corta al eje OX en $(0, 0)$.

Corte con OY $\rightarrow$ $x = 0$ $\quad y = \frac{0}{4 - 0} = 0 \qquad y = 0$. Corta al eje OY en $(0, 0)$

b) Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = -\infty \\ \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -2 \text{ es una asíntota vertical}$$

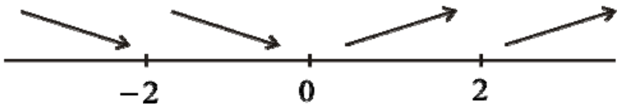
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 2 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -1 \text{ es una asíntota horizontal}$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x(4-x^2)-x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}=\dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$ $\qquad 8x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$

$f'(-3)<0$
$f'(-1)<0$
$f'(1)>0$
$f'(3)>0$

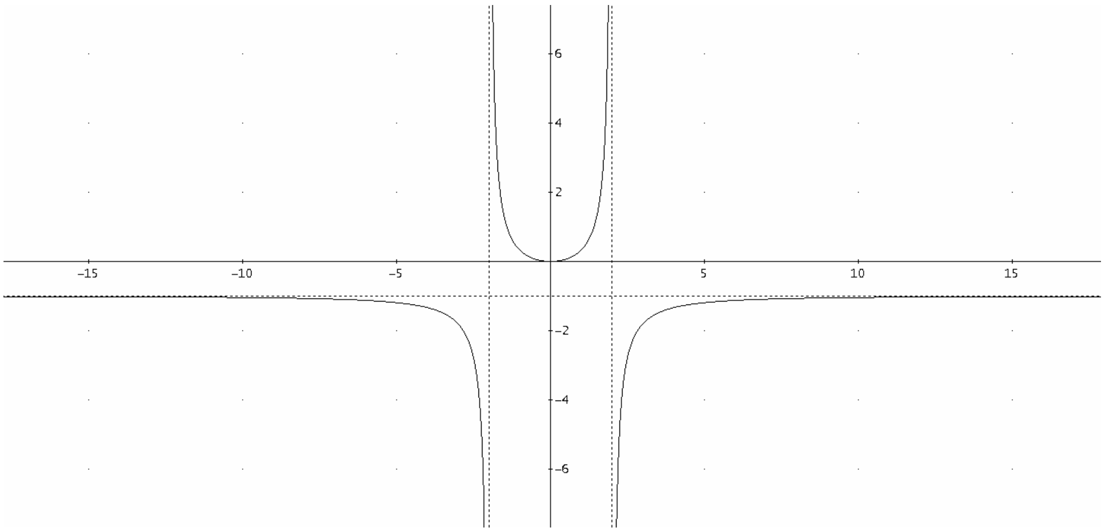


La función es creciente $\forall x \in \left]0,2\right[\cup \left]2,\infty\right[$

La función es decreciente $\forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-2,0\right[$

d) Hay un mínimo relativo en el punto $(0,0)$. No hay máximos relativos.

e)



3)

a) La función que determina el coste de fabricación unitario (lo que quiere decir por unidad fabricada) es:

$$C(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x-2\sqrt{x}+20}{x}=1-\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{20}{x}$$

b) $$C'(x)=-\frac{2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-2\sqrt{x}}{x^2}-\frac{20}{x^2}=-\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{x^2}-\frac{20}{x^2}=-\frac{\dfrac{x-2x}{\sqrt{x}}}{x^2}-\frac{20}{x^2}=\frac{x}{x^2\sqrt{x}}-\frac{20}{x^2}$$

$$C'(x)=\frac{x-20\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$$

Igualamos a cero tanto el numerador como el denominador para ver el signo de la derivada.

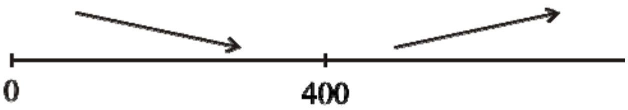
$$x-20\sqrt{x}=0 \qquad x=20\sqrt{x} \qquad x^2=(20\sqrt{x})^2 \qquad x^2-400x=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x=400 \end{cases}$$

$$x^2\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Dado que el dominio de la función son todos los números reales positivos, podemos hacer el siguiente análisis para la monotonía:

$f'(100) < 0$

$f'(500) > 0$



Del gráfico anterior se deduce que:

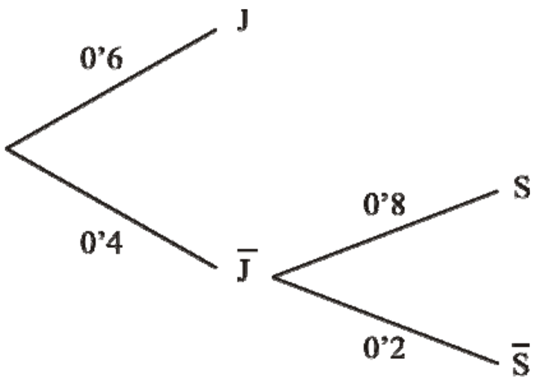
La función es creciente $\forall x > 400$

La función es decreciente $\forall x \in \left]0, 400\right[$

El mínimo coste por unidad se obtiene cuando se fabrican 400 unidades del artículo, y su valor es:

$$C(400) = 1 - \frac{2\sqrt{400}}{400} + \frac{20}{400} = 0'95\,€$$

4) Sean los sucesos "J" aprueba la asignatura en Junio y "S" aprueba la asignatura en Septiembre. Podemos establecer el siguiente diagrama en árbol:



a) $p(A) = 0'6 + 0'4 \cdot 0'8 = 0'92$

b) $p(J/A) = \dfrac{0'6}{0'6 + 0'4 \cdot 0'8} = 0'65$