Junio 2006 opción A. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) Sean x, y, z las variables que nos dan la rentabilidad de los suelos urbano, industrial y rústico respectivamente. Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 500000x+250000y+250000z=0'1375\cdot 1000000 \\ 125000x+250000y+125000z=0'1125\cdot 500000 \\ 100000x+100000y+200000=0'1\cdot 400000 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 500000x+250000y+250000z=137500 \\ 125000x+250000y+125000z=56250 \\ 100000x+100000y+200000=40000 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 5000x+2500y+2500z=1375 \\ 12500x+25000y+12500z=5625 \\ 10x+10y+20=4 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 5000 & 2500 & 2500 & 1375 \\ 12500 & 25000 & 12500 & 5625 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-1250F_1]{F_2=F_2-500F_1} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 0 & -2500 & -7500 & -625 \\ 0 & 12500 & -12500 & 625 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 0 & -2500 & -7500 & -625 \\ 0 & 12500 & -12500 & 625 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+5\cdot F_1} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 0 & -2500 & -7500 & -625 \\ 0 & 0 & -50000 & -2500 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y+20z=4 \\ -2500y-7500z=-625 \\ -50000z=-2500 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=0'2 \\ y=0'1 \\ z=0'05 \end{array}\right.$$

Es decir, la rentabilidad del terreno urbano es del 20%, la del terreno industrial es del 10% y la del terreno rústico es del 5%.

2)

a) El dominio es $\forall x \in R$, ya que es una función polinómica.

Cortes con el eje de abscisas

Igualamos la ecuación a cero y resolvemos por Ruffini.

$$x^3+x^2-5x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1\ \text{(doble)} \end{array}\right.$$

Los puntos de corte son $(-3,0)$ y $(1,0)$

Corte con el eje de ordenadas

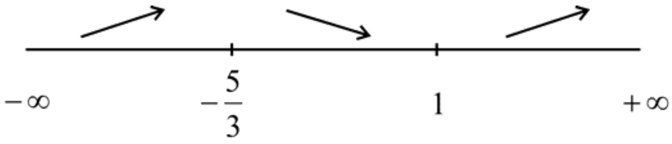
Hacemos que $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

El punto de corte es el $(0,3)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$y' = 3x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

$y'(-5) > 0$
$y'(0) < 0$
$y'(2) > 0$

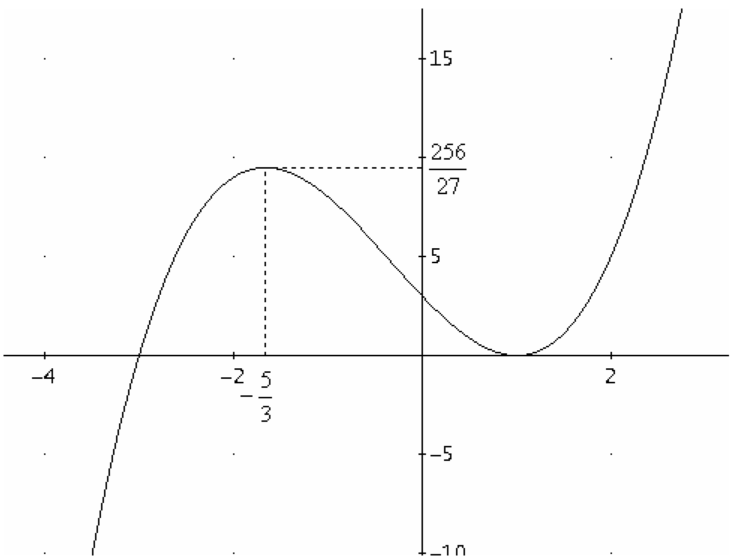


La función es creciente $\forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{5}{3}\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ y decreciente $\forall x \in \left]-\dfrac{5}{3},1\right[$

c) Del esquema del apartado anterior se observa que hay un máximo en $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{256}{27}\right)$

Del esquema del apartado anterior se observa que hay un mínimo en $(1,0)$

d)



3)

a) Partimos de la base que el dominio de la función es $\forall x > 0$.

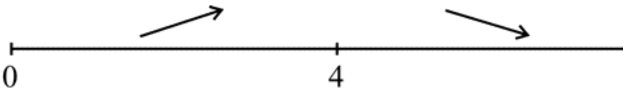
Para obtener el beneficio máximo calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$B'(x) = \frac{25(x^2+16) - 25x(2x)}{(x^2+16)^2} = \frac{-25x^2+400}{(x^2+16)^2} = 0 \qquad -25x^2 + 400 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$$

Como los años transcurridos no pueden ser negativos, es obvio que la solución es $x = 4$. Analizando el signo de la primera derivada deducimos que en $x = 4$ está el máximo, como se observa en el siguiente esquema:

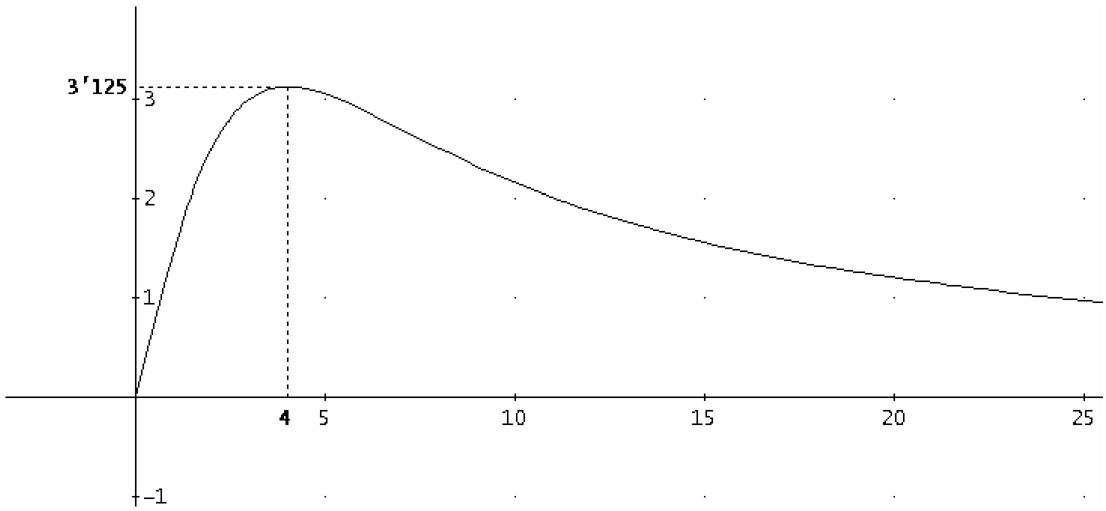
$B'(1) > 0$

$B'(5) < 0$



Han de transcurrir 4 años y el beneficio máximo es de $B(4) = \dfrac{25 \cdot 4}{(4^2 + 16)} = 3'125$ miles de euros, es decir 3125 €

b) Puesto que "x", que representa los años transcurridos, siempre es positiva, la función que representa los beneficios en función de los años transcurridos siempre es positiva (el numerador siempre es positivo y el denominador al estar al cuadrado también siempre es positivo) y nunca puede haber pérdidas, como se observa en la gráfica correspondiente.



4)

a) $p(A) + p(\overline{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0'4 = 0'6$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \qquad 0'9 = 0'6 + p(B) - 0'2 \quad \Rightarrow \quad p(B) = 0'5$

b) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0'2}{0'5} = 0'4$

c) Utilizando los diagramas de Venn se observa fácilmente que:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0'6 - 0'2 = 0'4$$

d) Aplicando las leyes de Morgan $\quad p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'2 = 0'8$

Junio 2006 opción B. Humanidades y Ciencias Sociales.

1) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-6 & 1 & -2\\ 5 & 0 & 1\\ 11 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\dfrac{15}{5}=3$ $\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -6 & -2\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 11 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\dfrac{-25}{5}=-5$ $\quad x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -6\\ 1 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\dfrac{10}{5}=2$

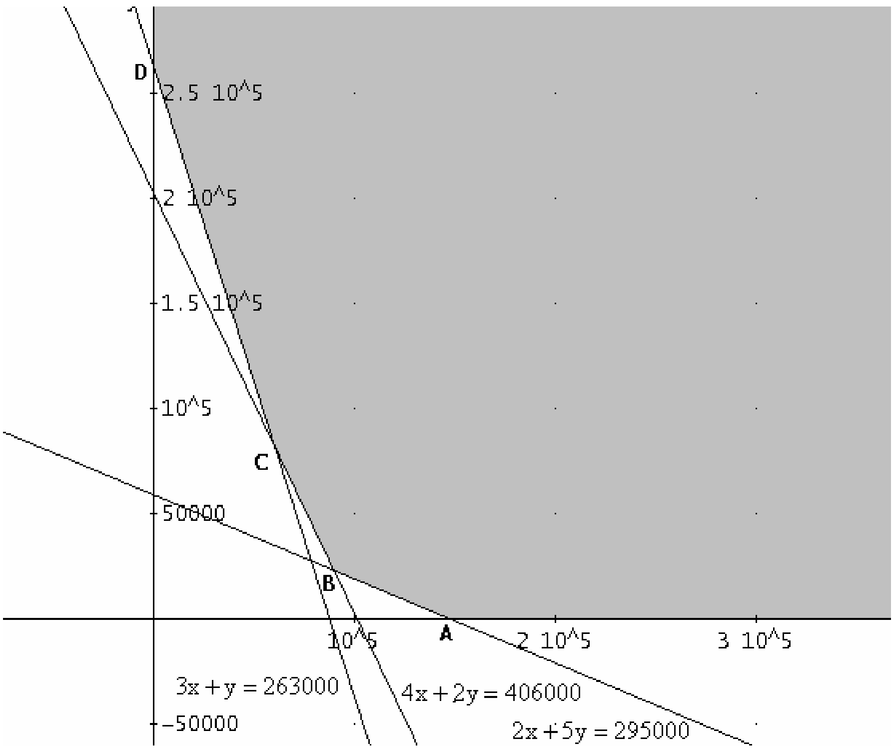
2) Llamamos “x” al nº de barriles de crudo ligero e “y” al número de barriles de crudo pesado.

	Gasolina 95	Gasolina 98	Gasoil
Barriles de crudo ligero (x)	0′3	0′4	0′2
Barriles de crudo pesado (y)	0′1	0′2	0′5
	26300	40600	29500

Tenemos que maximizar la función $F(x,y)=70x+65y$ con las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} 0'3x+0'1y\geq 26300\\ 0'4x+0'2y\geq 40600\\ 0'2x+0'5y\geq 29500\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r} 3x+y\geq 263000\\ 4x+2y\geq 406000\\ 2x+5y\geq 295000\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas: $3x+y=263000$ $\quad 4x+2y=406000$ $\quad 2x+5y=295000$



Calculamos los puntos de corte de las rectas correspondientes a los vértices de la región factible.

$$A(147500,0) \qquad \left.\begin{matrix} 4x+2y=406000 \\ 2x+5y=295000 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(90000,23000)$$

$$\left.\begin{matrix} 4x+2y=406000 \\ 3x+y=263000 \end{matrix}\right\} \rightarrow C(60000,83000) \qquad D(0,263000)$$

Sustituyendo A, B, C y D en la función objetivo obtenemos:

$$F(147500,0)=70\cdot 147500+65\cdot 0=10325000$$

$$F(90000,23000)=70\cdot 90000+65\cdot 23000=7795000$$

$$F(60000,83000)=70\cdot 60000+65\cdot 83000=9595000$$

$$F(0,263000)=70\cdot 0+65\cdot 263000=17095000$$

Para que el coste sea mínimo la refinería debe comprar 90000 barriles de crudo ligero y 23000 barriles de crudo pesado y el coste es de 7795000 €.

3)

a) En $x=-2$

1) $f(-2)=(-2)^2=4$

2) $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -2^-}(3x+10)=4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2=4 \end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \lim\limits_{x\to -2} f(x)=4$

3) $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)=4$

Por tanto, en $x=-2$ la función es continua.

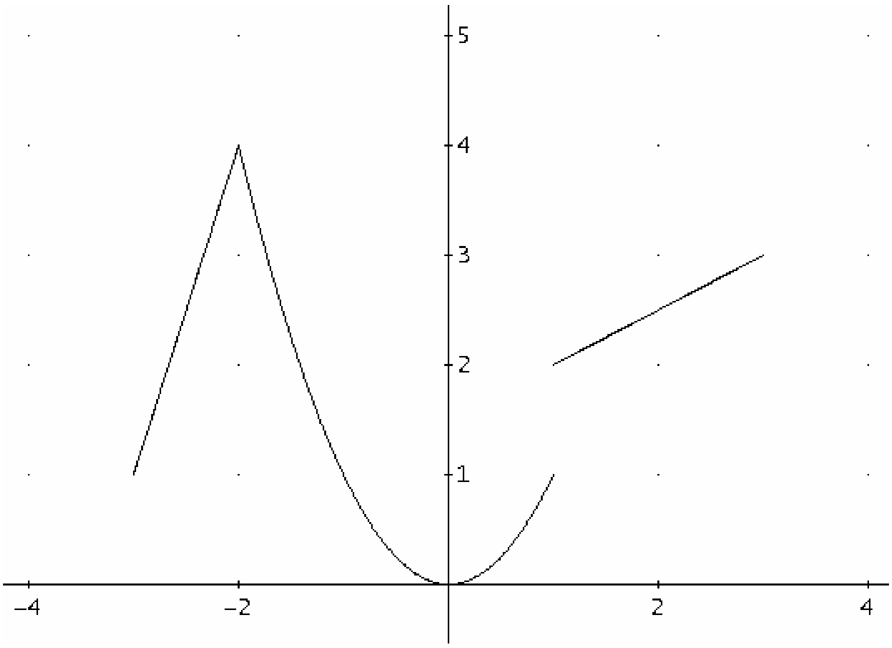
En $x=1$

1) $f(1)=\dfrac{1+3}{2}=2$

2) $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{2}=2 \end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Por tanto, en $x=1$ la función no es continua. La discontinuidad es de salto finito.

La función es continua $\forall x \in R-\{1\}$ como se observa en la siguiente gráfica:



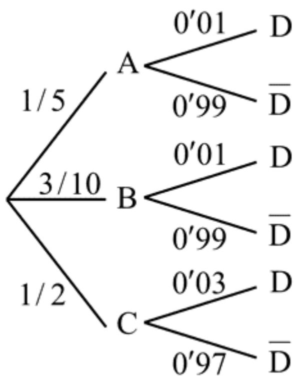
b) $\int_2^3 (2x^3 - 3x + 2)\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{27}{2} + 6 - (8 - 6 + 4) = 27$

4) Sean A, B y C las tres fábricas y D el suceso ser defectuoso. $\overline{D}$ es el suceso ser correcto. Dado que la producción en las tres fábricas juntas es de 5000 unidades tenemos que las probabilidades para cada una de ellas son:

$$p(A) = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5} = 0'2$$

$$p(B) = \frac{1500}{5000} = \frac{3}{10} = 0'3$$

$$p(C) = \frac{2500}{5000} = \frac{1}{2} = 0'5$$



a) $p(\overline{D}) = p(A)\cdot p(\overline{D}/A) + p(B)\cdot p(\overline{D}/B) + p(C)\cdot p(\overline{D}/C) = \frac{1}{5}\cdot 0'99 + \frac{3}{10}\cdot 0'99 + \frac{1}{2}\cdot 0'97 = 0'98$

La proporción de unidades fabricadas correctas es del 98 %.

b) $p(C/D) = \dfrac{p(C)\cdot p(D/C)}{p(C)\cdot p(D/C) + p(A)\cdot p(D/A) + p(B)\cdot p(D/B)} =$

$$\frac{0'5\cdot 0'03}{0'5\cdot 0'03 + 0'2\cdot 0'01 + 0'3\cdot 0'01} = 0'75$$

La probabilidad de que haya sido fabricada en la fábrica C es del 75 %