Problema 1

En el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ se consideran los siguientes sucesos:

$$A=\{2,5,6\} \qquad B=\{1,3,4,5\} \qquad C=\{4,5,6\} \qquad D=\{3\}$$

a) Formar los sucesos contrarios.

b) Formar los sucesos:

$$A\cup B \qquad A\cap C \qquad B\cup C \qquad A\cup(B\cap C) \qquad \overline{A\cup B} \qquad \overline{A}\cap\overline{B} \qquad \overline{A\cap B} \qquad \overline{A}\cup\overline{B}$$

$$A\cup(B\cap\overline{C}) \qquad A\cap(B\cup\overline{C}) \qquad \overline{A}\cap(B\cap C) \qquad (\overline{A\cap B})\cap C$$

c) Con los sucesos A y B del apartado anterior comprobar que $A-B=A\cap\overline{B}$

a) $\overline{A}=\{1,3,4\}$ $\qquad \overline{B}=\{2,6\}$ $\qquad \overline{C}=\{1,2,3\}$ $\qquad \overline{D}=\{1,2,4,5,6\}$

b)

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A\cap C=\{5,6\}$ $\quad B\cup C=\{1,3,4,5,6\}$ $\quad A\cup(B\cap C)=\{2,4,5,6\}$

$\overline{A\cup B}=\{\phi\}$ $\quad \overline{A}\cap\overline{B}=\{\phi\}$ $\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,6\}$ $\quad \overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,6\}$

$A\cup(B\cap\overline{C})=\{1,2,3,5,6,\}$ $\quad A\cap(B\cup\overline{C})=\{2,5\}$ $\quad \overline{A}\cap(B\cap C)=\{4\}$ $\quad (\overline{A\cap B})\cap C=\{4,6\}$

c) $A-B=\{2,6\}$ $\qquad A\cap\overline{B}=\{2,6\}$

Problema 2

Se efectúan tres disparos a un blanco. Sean A, B y C los sucesos que se verifican cuando el disparo primero, segundo y tercero, respectivamente, da en el blanco.

Describir los siguientes sucesos:

$$\overline{B}; \qquad A\cap B\cap\overline{C}; \qquad A\cup B; \qquad \overline{A}\cap B; \qquad A\cup(\overline{B}\cap\overline{C}); \qquad \overline{A\cup B\cup C}; \qquad \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C};$$

$$A\cap(B-C); \qquad (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B); \qquad A-(B\cup C);$$

$\overline{B}$ No acierta el segundo disparo

$A \cap B \cap \overline{C}$	Acierta el primero y el segundo pero falla el tercero.
$A \cup B$	Acierta uno al menos de los dos primeros disparos.
$\overline{A} \cap B$	Falla el primero y acierta el segundo.
$A \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$	Acierta el primero o bien falla los otros dos.
$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	Falla los tres disparos.
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	Falla los tres disparos.
$A \cap \left(B - C\right) = A \cap (B \cap \overline{C})$	Acierta el primero y el segundo pero falla el tercero.
$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$	Acierta el primero y falla el segundo, o bien, acierta el segundo y falla el primero.
$A - \left(B \cup C\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$	Acierta sólo el primero.

Problema 3

Expresa en función de A, B y C los sucesos:

Acierta con el 1º y con el 2º.	$A \cap B$
Acierta con los tres.	$A \cap B \cap C$
Acierta con alguno de los tres.	$A \cup B \cup C$
Falla con los tres.	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
Falla alguno de los tres.	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
Acierta con el 1º pero falla con el 2º.	$A \cap \overline{B}$
Acierta sólo con el 1º y con el 2º.	$A \cap B \cap \overline{C}$
Acierta sólo con uno.	$\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
Acierta sólo con dos.	$\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$
Acierta al menos dos.	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

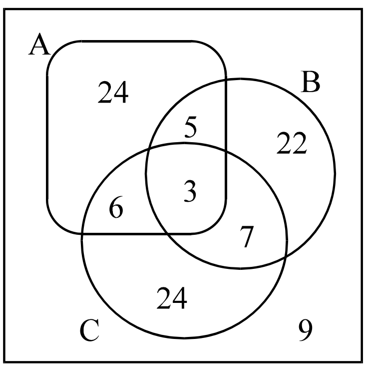
Acierta dos, como máximo. $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Acierta dos como mínimo. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

Problema 4

Una encuesta que se hace a 100 personas da el siguiente resultado: Hay 38 personas que leen el periódico A, 37 el periódico B y 40 el C; hay 8 que leen el A y el B, 9 que leen A y C, 10 que leen B y C y 3 que leen A, B y C. Llamemos, asimismo, A, B y C los sucesos que se verifican cuando al elegir una persona de las 100 de la encuesta ésta lee el periódico A, el B o el C, respectivamente. Hacer un diagrama de Venn de la situación que se expone. Expresar, en función de A, B y C los siguientes sucesos y calcular el número de elementos que tienen:

1. **Lee el A o el B por lo menos.**
2. **Lee el A o el B, pero no más.**
3. **Lee A y C pero no B.**
4. **Lee algún periódico.**
5. **Lee los tres periódicos.**
6. **Sólo lee uno de los tres.**
7. **Lee, como, máximo uno de los tres.**
8. **Lee dos de ellos, pero no tres.**
9. **No lee ninguno de los tres.**
10. **Ni lee A ni lee B.**



1. $A \cup B \rightarrow$ 67 personas

2. $(A \cup B) \cap \overline{C} \rightarrow$ 51 personas

3. $A \cap C \cap \overline{B} \rightarrow$ 6 personas

4. $A \cup B \cup C \rightarrow$ 91 personas

5. $A \cap B \cap C \rightarrow$ 3 personas

6. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \rightarrow$ 70 personas

7. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \rightarrow$ 79 personas

8. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \rightarrow$ 18 personas

9. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \rightarrow$ 9 personas

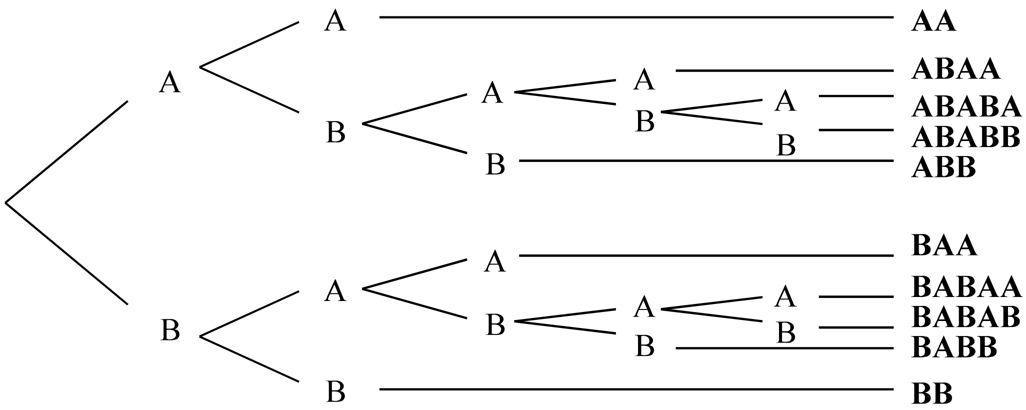
10. $\overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow$ 33 personas

Problema 5

Antonio y Basilio son los finalistas de un torneo de ajedrez. Gana el torneo quien gane dos juegos seguidos o tres alternativos. Hallar el espacio muestral o conjunto de los resultados posibles.

Indicaremos por A el suceso <<ganar Antonio>> y por B el suceso <<ganar Basilio>>=<<perder Antonio>>.

El siguiente diagrama en árbol muestra los diferentes resultados posibles:



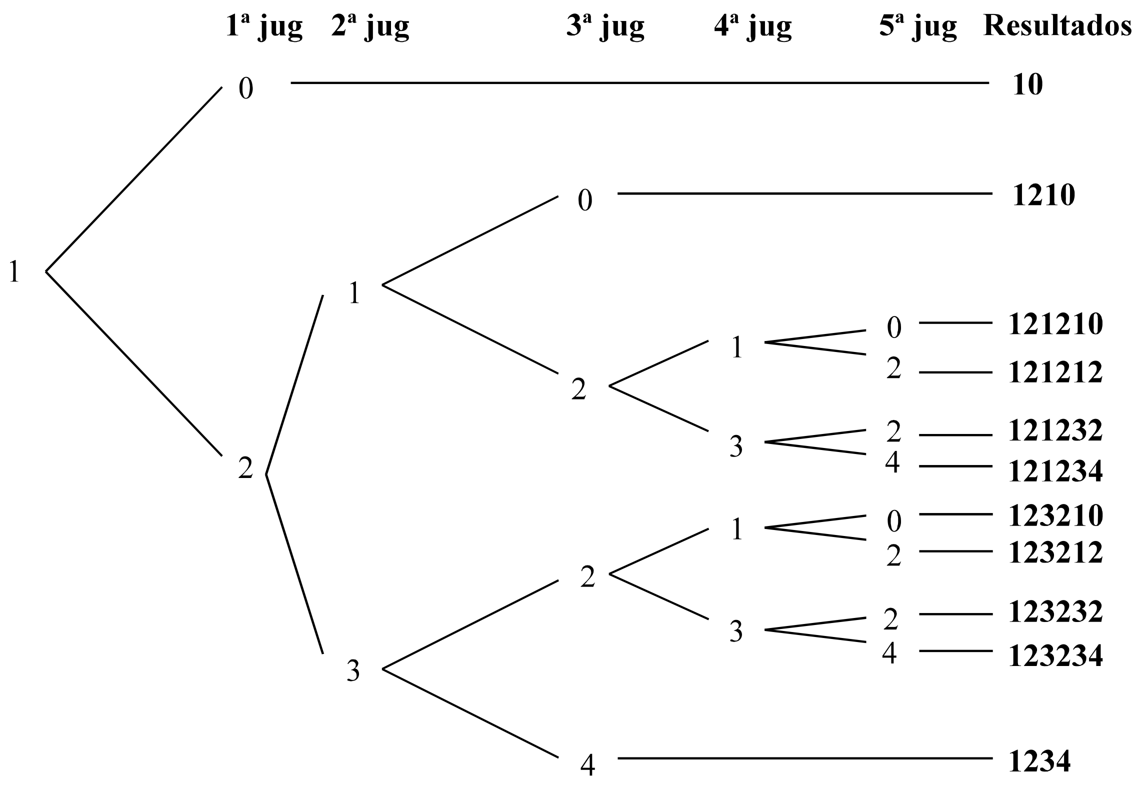
Por tanto el espacio muestral es:

$$E = \{AA, ABAA, ABABA, ABABB, ABB, BAA, BABAA, BABAB, BABB, BB\}$$

Problema 6

Un aficionado a los casinos tiene tiempo de jugar a la ruleta cinco veces a lo sumo. Cada apuesta es de 1000 pts. Empieza con 1000 pts y deja de jugar cuando pierde las 1000 pts. o cuando gane 4000 pts. Hallar el espacio muestral.

El siguiente diagrama en árbol muestra los resultados posibles del juego:



donde 1, 2, 3, 4 y 0 expresan el dinero que tiene en cada momento en miles de pesetas. Por tanto el espacio muestral es:

$$E = \{10, 1210, 121210, 121212, 121232, 121234, 123210, 123212, 123232, 123234, 1234\}$$

Problema 7

En una residencia hay 1085 ancianos, de los que 519 fuman y 226 tienen afecciones pulmonares. Pero sólo hay 31 que, aunque no fumen, tienen afecciones pulmonares. Haz una tabla de contingencia y averigua:

a) ¿Cuántos hay que fumen y tengan afecciones pulmonares?

b) ¿Qué proporción de fumadores tienen afecciones pulmonares?

c) ¿Qué proporción de no fumadores tienen afecciones pulmonares?

d) ¿Qué proporción de enfermos de pulmón son fumadores?

Si hacemos una tabla de contingencia tenemos los siguientes datos de partida que figuran en ella:

	Fumadores	No fumadores	Total
Afecciones pulmonares		31	226
No afecciones pulmonares			
Total	519		1085

Si vamos rellenando los cuadros tendremos:

	Fumadores	No fumadores	Total
Afecciones pulmonares	195	31	226
No afecciones pulmonares	324	535	859
Total	519	566	1085

a) Según se observa en la tabla hay 195.

b) $\frac{195}{519} = 0'3757$ es decir el 37’57 %

c) $\frac{31}{566} = 0'0547$ es decir el 5’47 %

d) $\frac{195}{226} = 0'8628$ es decir el 86’28 %

Problema 8

Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de obtener:

a) Suma igual a 6.

b) Suma impar.

c) Suma mayor que 3.

d) Sólo un 4 en algún dado.

e) Al menos un 4 en algún dado.

f) Dos números cuya suma sea 7 o su producto 12.

El conjunto de los casos posibles es $6\cdot 6=36$ o $VR_{6,2}=6^2=36$, es decir:

$$E=\{(1,1),(1,2),\ldots\ldots,(2,1),(2,2),\ldots\ldots,(6,6)\}$$

a) Los casos favorables son 5 $\longrightarrow$ $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$

$$p(6)=\frac{5}{36}=0'13$$

b) De los 36 casos posibles dan suma par los formados por un número par y otro impar. Fijado el primer número (cualquiera del 1 al 6) éste puede ir acompañado por tres.

Ejemplo: $(3,2),(3,4),(3,6)$. Luego habrá $6\cdot 3=18$ casos favorables:

$$p(\text{suma impar})=\frac{18}{36}=0'5$$

c) Es más fácil calcular la probabilidad del suceso contrario.

Sea A = "Obtener suma mayor que 3", por tanto $\overline{A}$ = "Obtener suma 2 o 3"

Luego $\overline{A}$ está formado por $(1,1),(1,2),(2,1)$. Así que:

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{3}{36}=\frac{33}{36}=0'91$$

d) De la forma $(4,-)$ hay cinco casos, y de la forma $(-,4)$ otros cinco. $(\text{No cuenta el }(4,4))$. Luego:

$$p(\text{sólo un } 4)=\frac{10}{36}=0'27$$

e) De la forma $(4,-)$ hay seis casos, igual que los que son de la forma $(-,4)$, pero el $(4,4)$ contó dos veces, luego:

$$p(\text{al menos un } 4)=\frac{11}{36}$$

f) Sea A el suceso "La suma sea 7" y sea B el suceso "Múltiplo de 12".

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$B=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\} \qquad A\cap B=\{(3,4),(4,3)\}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}-\frac{2}{36}=\frac{8}{36}=0'22$$

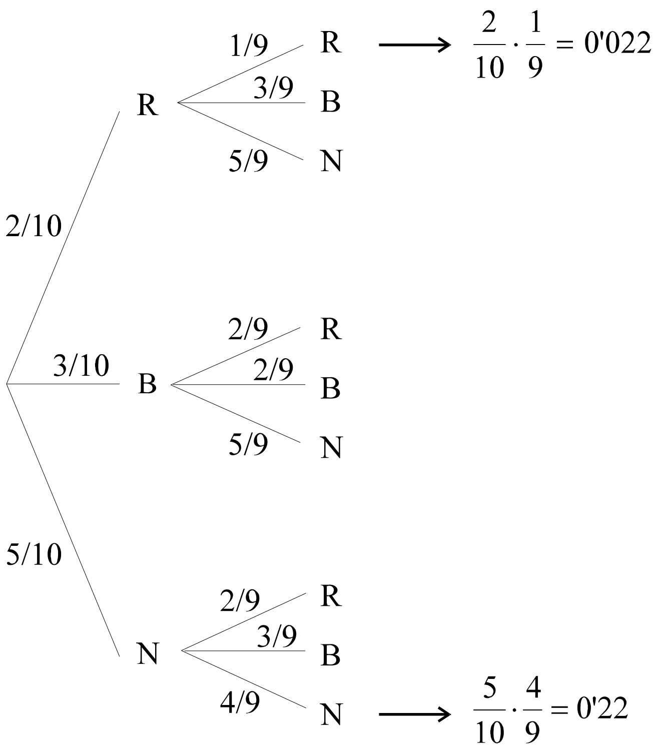
Problema 9

a) Una urna contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 5 negras. Se extrae una bola. Probabilidad de que sea roja, de que sea blanca y de que sea negra.

b) Se extraen simultáneamente dos bolas de la urna. Probabilidad de que ambas sean rojas. Probabilidad de que ambas sean negras.

c) Probabilidad de que las dos sean rojas o las dos negras.

d) Probabilidad de que ni las dos sean rojas ni las dos sean negras.



a) $p(R) = \dfrac{2}{10} = 0'2$ $\qquad p(B) = \dfrac{3}{10} = 0'3$ $\qquad p(N) = \dfrac{5}{10} = 0'5$

b) $p(2R) = \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{9} = 0'022$ $\qquad p(2N) = \dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{4}{9} = 0'22$

c) $p(2R \text{ ó } 2N) = 0'022 + 0'22 = 0'242$

d) En este caso nos piden $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=1-0'242=0'758$

Problema 10

Supongamos que la probabilidad de que mañana llueva es 0'4, y la de que llueva pasado mañana 0'3; supongamos que la probabilidad de que llueva los dos días es 0'2. Calcular:

a) Probabilidad de que llueva uno, al menos, de los dos días.

b) Probabilidad de que no llueva ningún día.

c) Probabilidad de que sólo llueva mañana.

d) Probabilidad de que sólo llueva un día.

Llamemos A = "Mañana lloverá" y B = "Pasado mañana lloverá".

En este problema no disponemos de <<casos igualmente posibles>>, por lo que no es posible hacer uso de la regla de Laplace.

Utilizaremos los axiomas y las consecuencias de la definición de probabilidad.

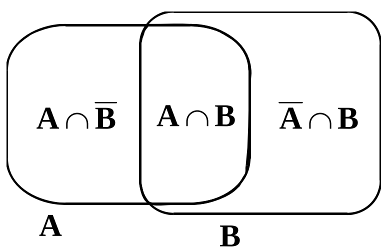
a) Este suceso se verifica cuando se verifiquen A o B o ambos; luego es el suceso $A\cup B$:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0'4+0'3-0'2=0'5$$

b) Se trata del suceso $\overline{A\cup B}$; luego:

$$p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=1-0'5=0'5$$

c)



De acuerdo con el diagrama resulta que los sucesos $A\cap\overline{B}$ y $A\cap B$ son incompatibles y su unión es A. Por tanto:

$$p(A)=p\left(A\cap\overline{B}\right)+p(A\cap B)$$

Luego: $0'4 = 0'2 + p\left(A \cap \overline{B}\right) \quad \Rightarrow \quad p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0'2$

donde $A \cap \overline{B}$ es el suceso <<sólo lloverá mañana>>

d) El suceso <<sólo llueve un día>> es $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, (sólo llueve mañana, o bien, sólo llueve pasado mañana). por tanto, al ser $A \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap B$ incompatibles resulta:

$$p\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = p\left(A \cap \overline{B}\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$$

$p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0'2$ como se vio anteriormente.

$$p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B) = 0'3 - 0'2 = 0'1$$

Luego:

$$p\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = 0'2 + 0'1 = 0'3$$

Problema 11

En unas oposiciones con un temario de 100 temas se eligen al azar 3 temas. Si un opositor se ha preparado 30 temas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de contestar los 3?

b) ¿Cuál de no contestar ninguno?

c) ¿Cuál de contestar sólo 1?

d) ¿Cuál de contestar al menos 1?

e) ¿Cuál de contestar al menos 2?

a) $p(\text{los } 3) = \dfrac{C_{30,3}}{C_{100,3}} = 0'025$ es decir el 2'5%

b) $p(\text{ninguno}) = \dfrac{C_{70,3}}{C_{100,3}} = 0'056$ es decir el 5'6%

c) $p(\text{sólo } 1) = \dfrac{C_{30,1} \cdot C_{70,2}}{C_{100,3}} = 0'448$ es decir el 44'8%

d) $p(\text{al menos } 1) = 1 - p(\text{ninguna}) = 1 - \dfrac{C_{70,3}}{C_{100,3}} = 0'943$ es decir el 94'3%

e) $p(\text{al menos } 2) = p(2) + p(3) = \dfrac{C_{30,2} \cdot C_{70,1}}{C_{100,3}} + \dfrac{C_{30,3}}{C_{100,3}} = 0'213$ es decir el 21'3%

Problema 12

En una casa de 7 pisos concurren dos personas a la puerta del ascensor.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos vayan al mismo piso?

b) ¿Y si son 3 personas?

a) $p = \dfrac{7}{VR_{7,2}} = \dfrac{7}{49} = 0'14$

b) $p = \dfrac{7}{VR_{7,3}} = \dfrac{7}{343} = 0'020$

Problema 13

El Caballero de Meré propuso a Pascal el siguiente problema:

a) ¿Cuál es la probabilidad p de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble?

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que $p = \frac{1}{2}$?

c) Determinar si es o no ventajoso jugar apostando cantidades iguales a que por lo menos aparece un 6 en cuatro tiradas de un dado correcto.

a) Por cada lanzamiento hay 36 casos posibles y uno solo favorable, por tanto la probabilidad de que no salga el 6 doble en cada lanzamiento es $\dfrac{35}{36}$, y la probabilidad de que no salga el 6 doble en los n lanzamientos es $\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$. Por consiguiente la probabilidad de obtener al menos un 6 doble en los n lanzamientos es $p = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n$.

b) El número de partidas que hay que jugar para $p = \frac{1}{2}$ viene dado por el valor de n en:

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad n \log \frac{35}{36} = \log \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad n = 24'605 \cong 25$$

c) Consideremos los sucesos siguientes:

A: <<Obtener al menos un 6 en las cuatro tiradas>>

B: <<No obtener ningún 6 en las cuatro tiradas>>

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0'5177 > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$ resulta ventajoso apostar la misma cantidad.

Problema 14

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir 25 personas al azar, entre ellas haya al menos dos cuyos cumpleaños coincidan?
b) Escogidas 5 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido el mismo día de la semana?

a) El cálculo directo de esta probabilidad exige analizar muchos casos, ya que si suponemos ordenadas estas 25 personas debe de calcularse la probabilidad de que coincidan los cumpleaños de la 1ª y 2ª, 1ª y 3ª, 1ª y 4ª, etc., analizar y separar del cómputo los casos en que coinciden los cumpleaños de más de dos, por haberse contado dos veces. ¡excesivo!

Consideremos el suceso contrario: que no haya dos cuyos cumpleaños coincidan, es decir, que las 25 fechas de cumpleaños sean distintas.

Así, la fecha en que cumple años la primera persona puede ser cualquiera de las 365 fechas del año $p = \frac{365}{365}$.

La fecha en que cumple años la segunda persona puede ser cualquiera de las 364 fechas restantes $p = \frac{364}{365}$.

La fecha en que cumple años la tercera persona puede ser cualquiera de las 363 fechas restantes $p = \frac{363}{365}$.
La fecha en que cumple años la veinticincoava persona puede ser cualquiera de las $365 - 24 = 341$ fechas restantes $p = \frac{341}{365}$.

Luego, la probabilidad de que no cumplan dos en la misma fecha es:

$$p = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \frac{341}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 341}{(365)^{25}}$$

la probabilidad pedida es: $\quad 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 341}{(365)^{25}} = 0'4313 \approx 43\%$

b) Razonando igual que en el apartado anterior tenemos:

$$p = 1 - \frac{7}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = 0'8501$$

Problema 15

En una baraja de 40 cartas se toman tres cartas distintas. Calcular la probabilidad de que las tres sean números distintos.

Cogemos una, cuya probabilidad es de $\frac{40}{40}$.

Como hay 4 cartas que tienen el mismo número, la segunda carta que escojamos será de las 36 restantes que no tienen que ver con ese número, es decir, la probabilidad de la segunda será: $\frac{36}{39}$.

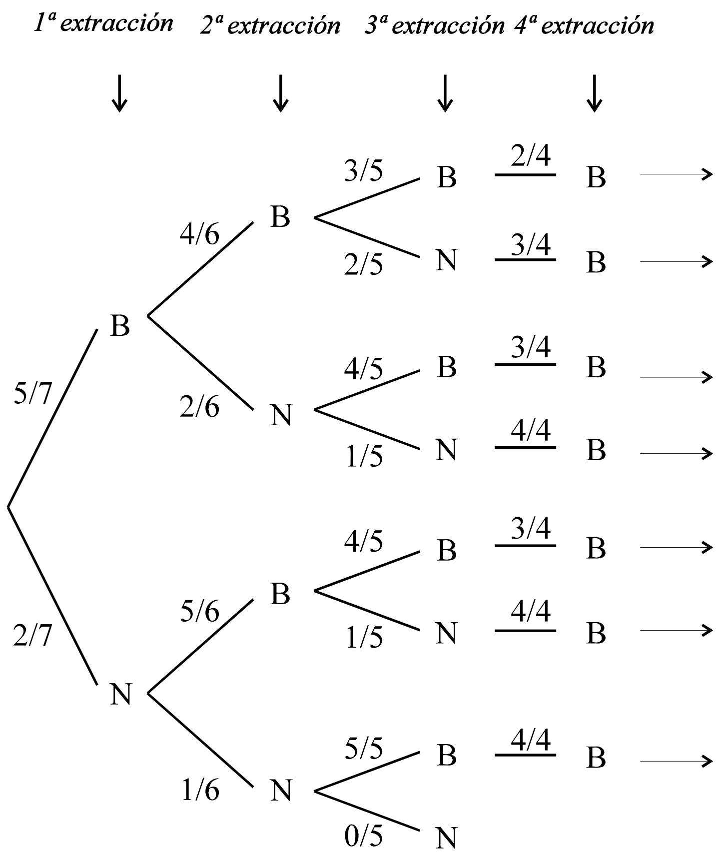
Como de la primera hay 4 números iguales y de la segunda también, la probabilidad de la tercera será de: $\frac{32}{38}$.

Por tanto, la probabilidad de que los tres números sean distintos será de:

$$\frac{40}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = 0'777$$

Problema 16

Una urna contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se extraen 3 bolas, sin fijarnos en el color, y se dejan aparte. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente que se extraiga sea blanca?



$$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{21}$$

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{21}$$

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{21}$$

$$p(B) = 4\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{1}{21}=\frac{4}{7}+\frac{3}{21}=0'7142$$

Problema 17

Un avión tiene 5 bombas. Desea destruir un puente. La probabilidad de destruirlo de un bombazo es de 1/5. ¿Cuál es la probabilidad de que destruya el puente?

Sean los sucesos:

A = <<Destruir el puente>> y B = <<No destruirlo>>

$$\text{p(al menos una)} = 1-\text{p(ninguna)} = 1-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=0'67232$$

Problema 18

En una clase, el 40% aprueba filosofía y el 50% matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0'8. Probar que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcular el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Lo mejor es estudiar el problema a través de una tabla de contingencia.

Del enunciado se deduce que los que aprueban filosofía habiendo aprobado matemáticas son un 80% del 50% (que aprueba las matemáticas), es decir el 40%.

	Aprobar Fil.	Suspender Fil.	Total
Aprobar Mat.	40% (3)	10% (4)	50% (1)
Suspender Mat.	0% (4)	50% (5)	50% (2)
Total	40% (1)	60% (2)	100% (1)

Los números pequeños entre paréntesis indican el orden en que se ha llenado la tabla. Mirándola, se observa que el 50% del total (la mitad de la clase) suspende matemáticas y filosofía. Y que el total (el 100%) de los que aprueban filosofía, también aprueban matemáticas.

Problema 19

Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestro fraudulentos presentados por sus asegurados. Clasificando los seguros en tres clases, incendio, automóvil y "otros", se obtiene la siguiente relación de datos:

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóvil fraudulentos; el 3% son "otros" partes fraudulentos; el 14% son partes por incendios no fraudulentos; el 29% son partes por automóvil no fraudulentos y el 47% son "otros" partes no fraudulentos.

a) Hacer una tabla ordenando los datos anteriores y hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcular qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la rama de automóviles y cuál a "otros". Añadir estos datos a la tabla:

c) Calcular la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será, en cambio, la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

a) y b)

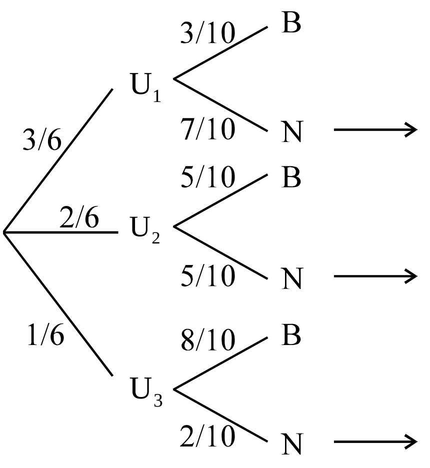
	Incen.	Autom.	Otros	Total
Fraude	6%	1%	3%	10%
No Fraude	14%	29%	47%	90%
	20%	30%	50%	100%

c) $p[\text{Fraude}] = 10\% = 0'1$ $\qquad p[\text{Fraude / Incendios}] = \dfrac{6\%}{20\%} = \dfrac{0'06}{0'20} = 0'3$

Problema 20

Tenemos tres urnas U_1, U_2 y U_3 con las siguientes composiciones de bolas blancas y negras: $U_1(3B,7N)$, $U_2(5B,5N), U_3(8B,2N)$. Tiramos un dado perfecto y extraemos una bola de U_1 si sale 1, 2 ó 3, sacamos una bola de U_2 si sale 4 ó 5 y, finalmente, sacamos una bola de U_3 si sale 6. Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Representamos el proceso en un diagrama en árbol y calculamos la probabilidad total sumando las correspondientes ramificaciones.



$$\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{10}=\frac{21}{60}$$

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{10}=\frac{10}{60}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{2}{60}$$

$$p[\text{Negra}] = \frac{21}{60}+\frac{10}{60}+\frac{2}{60}=\frac{11}{20}$$

Problema 21

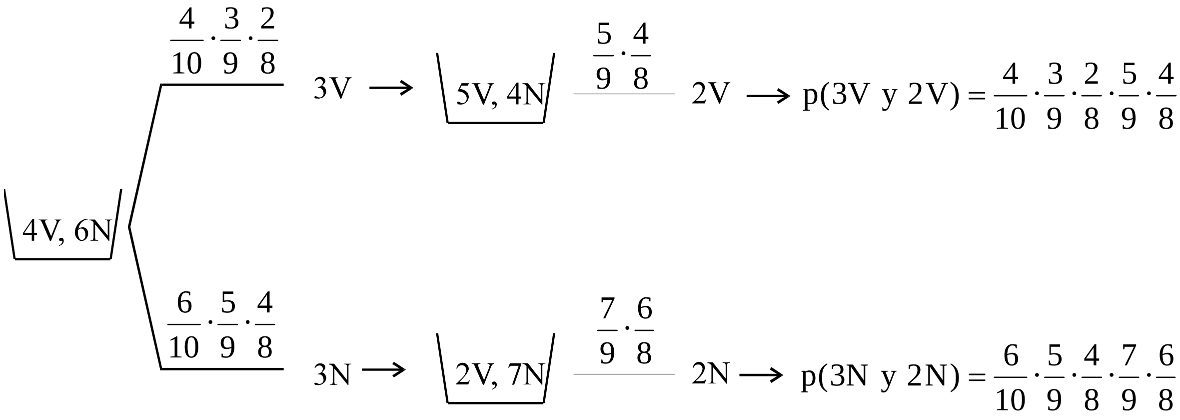
Se tienen dos urnas que contienen 4 bolas verdes y 6 negras la primera y 2 verdes y 4 negras la segunda. Se procede a sacar 3 bolas de la primera, a introducirlas en la segunda y a sacar, a continuación, 2 bolas de esta última urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color las 5 bolas extraídas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean verdes y 1 negra?

c) Si las bolas extraídas han sido 4 verdes y 1 negra, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 extraídas de la primera urna sean verdes?

a)

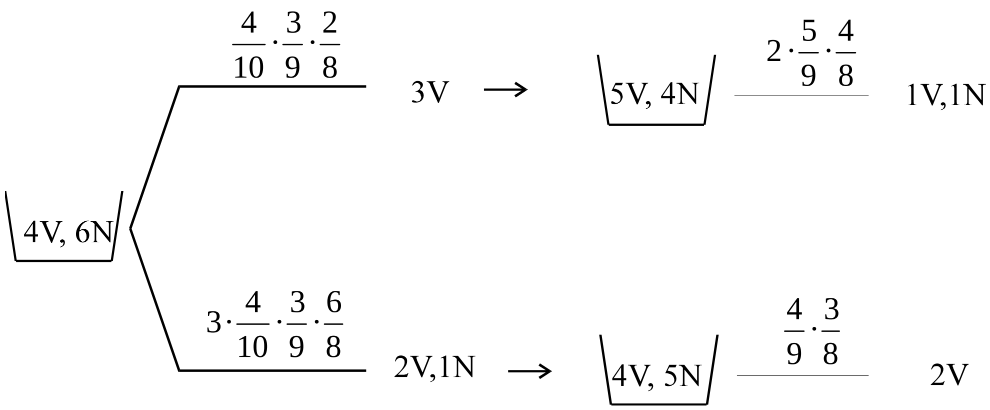


$$P\left[5 \text{ del mismo color}\right] = P\left[3V \text{ en I y } 2V \text{ en II}\right] + P\left[3N \text{ en I y } 2N \text{ en II}\right] =$$

$$P\left[3V \text{ en I}\right] \cdot P\left[2V \text{ en II} / 3V \text{ en I}\right] + P\left[3N \text{ en I}\right] \cdot P\left[2N \text{ en II} / 3N \text{ en I}\right] =$$

$$\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}\right) \cdot \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8}\right) = \frac{23}{216} = 0'106$$

b)



$$P\left[4V \text{ y } 1N\right] = P\left[3V \text{ en I y } 1V{,}1N \text{ en II}\right] + P\left[2V{,}1N \text{ en I y } 3V \text{ en II}\right] =$$

$$P\left[3V \text{ en I}\right] \cdot P\left[1V{,}1N \text{ en II} / 3V \text{ en I}\right] + P\left[2V{,}1N \text{ en I}\right] \cdot P\left[3V \text{ en II} / 2V{,}1N \text{ en I}\right] =$$

$$\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}\right) + \left(3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{3.552}{51.840} = 0'068$$

En el producto $2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$, el multiplicar por 2 se debe a que en la extracción distinguimos si la primera bola que sacamos es verde o negra, es decir VN ó NV.

En el producto $3\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}$, el multiplicar por 3 se debe a que en la extracción distinguimos las siguientes posibilidades: VVN, VNV y NVV. Corresponde a $PR_3^2=\frac{3!}{2!}=3$.

c) Del diagrama en árbol anterior se deduce:

$$p\left[3V \text{ en } I / 4V{,}1N \text{ en total}\right]=\frac{2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}{2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot 3\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}}=0'270270$$

Problema 22

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ax+y+z=2} \\ \mathbf{bx+y+z=3} \\ \mathbf{x+y+cz=4} \end{aligned}\right\}$$

donde a, b y c son los números que se obtienen, respectivamente, como resultado de la primera, segunda y tercera tirada, al lanzar un dado de seis caras al aire.

Se lanza tres veces al aire un dado de seis caras. Determinar la probabilidad para que al sustituir en el sistema a, b y c por los valores obtenidos, el sistema resulte compatible y determinado.

Para que el sistema sea compatible y determinado el determinante de la matriz debe de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=-(b-a)(c-1)$$

El sistema es compatible determinado cuando $c\neq 1$ y $b\neq a$. Veamos la probabilidad de que esto ocurra.

Como $c\neq 1$ y en un dado tenemos seis posibilidades $\Rightarrow\quad p(c)=\frac{5}{6}$

Como $b \neq a$ significa que a y b no pueden tomar los mismos valores, es decir no puede ser que sean $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$. Uno de los dos puede tomar cualquier valor, es decir $p(a)=\frac{6}{6}$, y el otro sólo puede tener uno de los cinco restantes, es decir $p(b)=\frac{5}{6}$.

Como los sucesos son independientes, tenemos:

$$p(a)\cdot p(b)\cdot p(c)=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=0'6944$$

Problema 23

Un dado numerado del 1 al 6 está lastrado de modo que la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número.

i) Hallar la probabilidad de que salga 3 si se sabe que salió impar.
ii) Calcular la probabilidad de que salga par si se sabe que salió mayor que 3.

i) Llamando $p[1]=k,\ p[2]=2k,\ p[3]=3k,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,p[6]=6k$ y teniendo en cuenta que la probabilidad total es 1, se obtiene la probabilidad de cada cara.

Para obtener las probabilidades pedidas tendremos en cuenta que: $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$

$$p[1]+p[2]+p[3]+\cdots\cdots+p[6]=k+2k+3k+\cdots\cdots+6k=21k \quad\rightarrow\quad 21k=1 \quad k=\frac{1}{21}$$

$$p[3/\text{impar}]=\frac{p[3\cap\text{impar}]}{p[\text{impar}]}=\frac{p(3)}{p(1)+p(2)+p(3)}=\frac{3k}{k+3k+5k}=\frac{1}{3}$$

ii) $$p[\text{par}/\text{mayor que }3]=\frac{p[\text{par}\cap\text{mayor que }3]}{p[\text{mayor que }3]}=\frac{p(4)+p(6)}{p(4)+p(5)+p(6)}=\frac{4k+6k}{4k+5k+6k}=\frac{2}{3}$$

Obsérvese que no ha sido necesario usar el valor de k.

Problema 24

Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número menor que en la primera.

De los 36 casos posibles suprimimos los 6 en que ambas puntuaciones coinciden. Quedan 30. En la mitad de ellos será mayor la primera tirada y, en la otra mitad, la segunda.

$$p = \frac{15}{36} = 0'41\widehat{6}$$

Problema 25

Cuatro atletas toman parte en una competición. ¿De cuántas maneras podrán llegar a la meta, si suponemos que pueden llegar más de uno simultáneamente? Hallar la probabilidad de que lleguen dos de ellos a la vez a la meta.

- Sin ninguna llegada simultánea: $4! = 24$ formas.

- Ocupando las tres primeras plazas:

1º	2º	3º
A	B	C y D

  En cada plaza sólo pueden coincidir como mucho dos elementos, para que se ocupen las tres plazas. Si nos fijamos en la tercera plaza, hay $C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ formas de que se combinen dos elementos, pero combinadas en la primera y segunda plaza con dos posibilidades luego hay 12 formas distintas. Si los dos elementos coinciden en la primera o segunda plaza en total tendremos: $3 \cdot 12 = 36$.

- Ocupando sólo las dos primeras plazas:

1º	2º		
A y B	C y D	$\longrightarrow \binom{4}{2} = 6$ formas	14 formas
A, B y C	D	$\longrightarrow$ 4 formas	
A	B, C y D	$\longrightarrow$ 4 formas	

- Ocupando sólo la primera es que coincidan los cuatro, lo cual sucede de una sola manera.

En total tendremos $24 + 36 + 14 + 1 = 75$ formas distintas.

Para calcular la probabilidad de que lleguen dos a la vez, entenderemos que es llegar al menos dos a la vez, luego:

$$p[\text{lleguen dos a la vez}] = \frac{36+14+1}{75} = \frac{51}{75} = 0'68$$

Problema 26

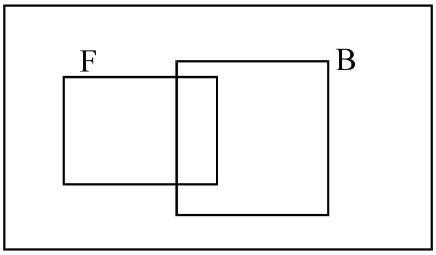
En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, ¿cuál será la probabilidad de que, escogido al azar un alumno de la clase:

a) Juegue sólo al fútbol.

b) Juegue sólo al baloncesto.

c) Practique uno solo de los deportes.

d) No juegue ni al fútbol ni al baloncesto.



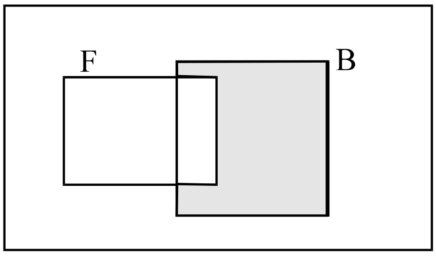
F: Juegan al fútbol

B: Juegan al baloncesto.

a) 60% no juegan al fútbol $\Rightarrow$ 40% juegan al fútbol

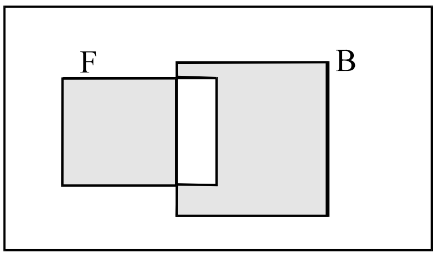
Descontando el 10% que juegan también al baloncesto $\Rightarrow$ $p(\text{sólo fútbol}) = 30\% = 0'3$

b) Entendemos que quiere decir "juegue al baloncesto pero no al fútbol". (Esta aclaración es imprescindible pues hay más deportes).



$$p(B-F) = p(F\cup B) - p(F) = 0'6 - 0'4 = 0'2$$

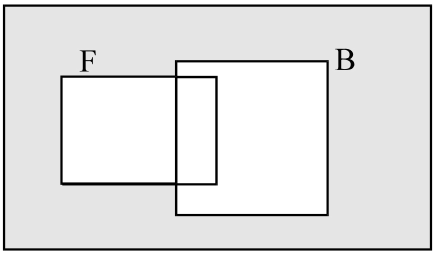
c) Entendemos "uno solo de éstos deportes".



$$p(\text{uno sólo de F ó B}) = p(F\cup B) - p(F\cap B) =$$

$$0'6 - 0'1 = 0'5$$

d)



$$p(\text{ni F ni B}) = p\left(\overline{F \cup B}\right) = 1 - p(F \cup B) =$$

$$1 - 0'6 = 0'4$$

Problema 27

En una ciudad el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar. Calcular:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

	Pelo Castaño	No pelo Castaño	Total
Ojos Castaños	15	**10**	25
No ojos Castaños	**25**	**50**	**75**
Total	40	**60**	**100**

Lo mejor es hacer una tabla de contingencia.

Los números en negro se obtienen teniendo en cuenta los datos del problema y, simplemente, procurando que cuadren las sumas.

A partir de la tabla se contestan de inmediato las preguntas que nos hacen.

a) $p[\text{ojos castaños / cabellos castaños}] = \dfrac{15}{40} = 0'375$

b) $p[\text{no cabellos castaños / ojos castaños}] = \dfrac{10}{25} = 0'4$

c) $p[\text{no cabellos castaños y no ojos castaños}] = \dfrac{50}{100} = 0'5$

Problema 28

En un espacio probabilístico, consideremos los sucesos A y B, ambos de probabilidad no nula. Se dice que A y B son incompatibles si $A \cap B = \varnothing$. Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si A y B son incompatibles, entonces son independientes.

b) Si A y B son independientes, entonces son incompatibles.

c) Si A y B son independientes $\mathbf{p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B/A)}$

a) **Falsa.** Por ejemplo, al tirar un dado correcto, los sucesos {5}, {6} son incompatibles, pues $\{5\} \cap \{6\} = \varnothing$, pero no independientes, pues:

$$p(5) \cdot p(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \neq p\left[\{5\} \cap \{6\}\right] = 0 .$$

b) **Falsa.** Por ejemplo, al tirar un dado correcto, los sucesos:

$A = \text{"Par"} = \{2,4,6\}$ y $B = \text{"Múltiplo de 3"} = \{3,6\}$ son independientes.

$p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = p[A \cap B] = p(6)$ sin embargo no son incompatibles.

c) **Verdadera.** $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$

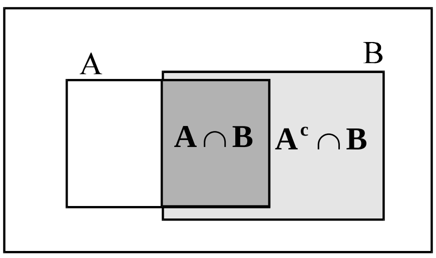
Pues si A y B son independientes, $p(B) = p(B/A)$, por tanto en este caso:

$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B/A)$

Problema 29

Sean A y B dos sucesos y $\mathbf{A^c}$ el suceso contrario de A. Si son conocidas las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A \cup B}$, $\mathbf{A^c}$ y $\mathbf{A \cap B}$, ¿cómo puedes hallar las probabilidades de los sucesos B, A y $\mathbf{A^c \cap B}$

Hay que recordar que:



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A^c) = 1 - p(A)$$

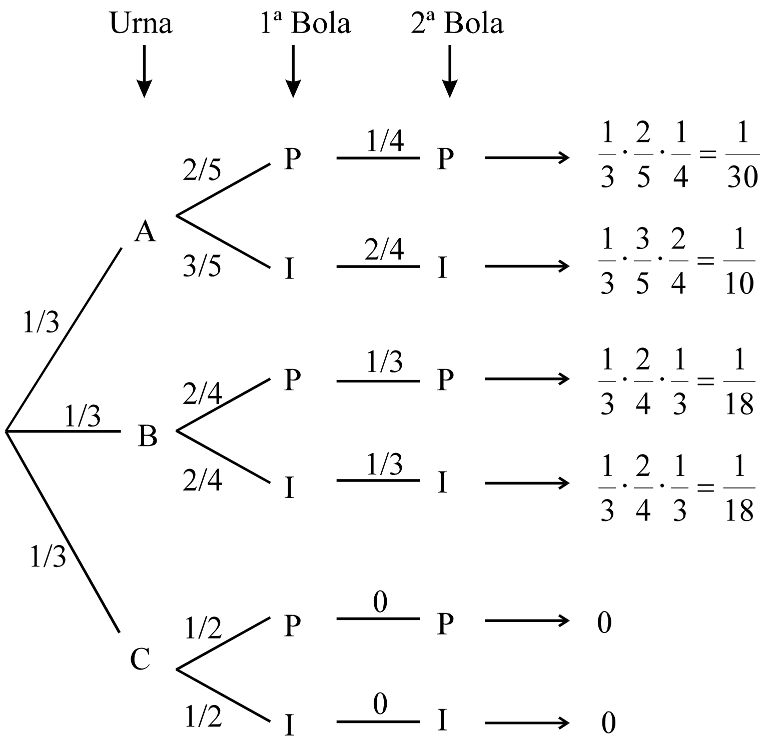
$$p(B) = p(A \cap B) + p(A^c \cap B)$$

$$p(A) = 1 - p(A^c) \qquad p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(A)$$

$$p(A^c \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$$

Problema 30

Once bolas que llevan grabados los números del 1 al 11 están repartidas en 3 urnas. Una de estas urnas contiene las bolas con los números 1, 2, 3, 4 y 5, otra las que corresponden a los números 6, 7, 8, y 9 y la tercera a las dos bolas restantes. Elegida una urna al azar, se sacan dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?



La probabilidad de que la suma final sea par es:

$$p(\text{suma par}) = \frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{11}{45}=0'2\widehat{4}$$

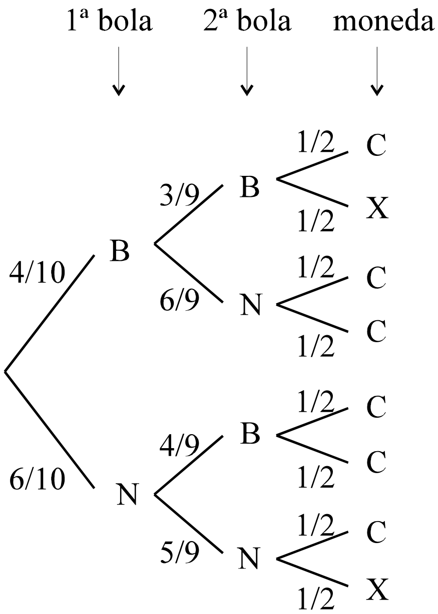
Problema 31

Disponemos de dos monedas, una correcta y otra con dos caras y una urna con diez bolas, cuatro blancas y seis negras. Sacamos dos bolas de la urna; si son del mismo color elegimos la moneda correcta y la lanzamos al aire. En otro caso, elegimos la incorrecta y la lanzamos al aire. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las bolas sean del mismo color.

b) Obtener cara en el lanzamiento de la moneda.

c) Si el resultado del lanzamiento de la moneda ha sido cruz, hallar la probabilidad de que las dos bolas elegidas sean de distinto color.



a) $p[2B \text{ ó } 2N] = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{42}{90} = 0'4\widehat{6}$

b) $p(C) = 1 - p(X) = 1 - \left[\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\right] = 0'7\widehat{6}$

c) Si en la moneda sale cruz es porque es la moneda correcta, lo que significa que las dos bolas salieron del mismo color. La probabilidad pedida es nula.

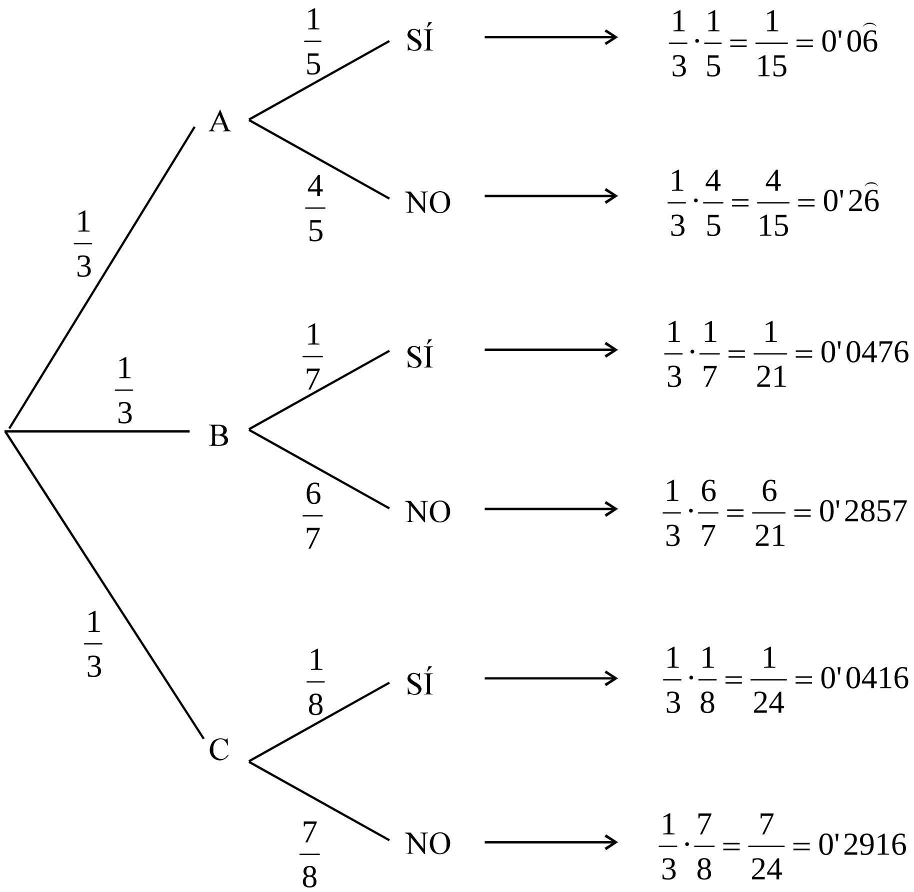
Problema 32

En una casa hay tres llaveros A, B y C. El primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

c) Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?



a) $p[\text{SÍ}]=\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}=0'1559$

b) $p[\text{Cara y NO}]=\frac{7}{24}=0'2916$

c) $p[A/SI]=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}}=0'4274$

Problema 33

Sea A un suceso con $0 < p(A) < 1$

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario $\overline{A}$?

b) Sea B otro suceso tal que $A \supset B$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\overline{C}$ independientes? Justificar las respuestas.

a) Tendremos en cuenta que dos sucesos son independientes si se verifica que:

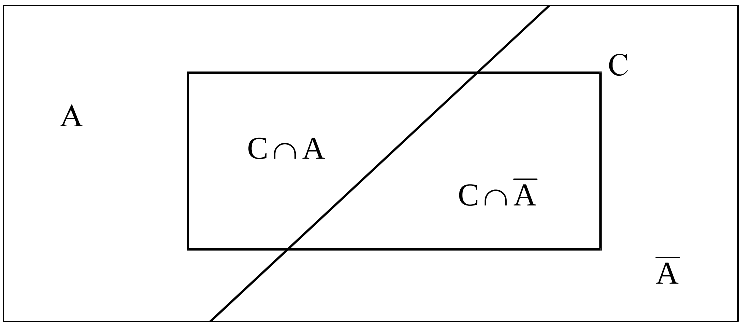
$$p(S_1 \cap S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A \cap \overline{A}) = p(\varnothing) = 0 \\ p(A) \cdot p(\overline{A}) \neq 0 \;\text{ y }\; p(\overline{A}) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; p(A \cap \overline{A}) \neq p(A) \cdot p(\overline{A}) \;\Rightarrow\; A \text{ y } \overline{A} \text{ son dependientes}$$

b) Si B está contenido en A entonces $p(A \cap B) = p(B)$. ¿Es posible que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$?

Puesto que $p(A) < 1$, la igualdad sólo es posible si $p(B) = 0$. Por tanto A y B no son independientes salvo que $p(B) = 0$.

c)



$$C = (C \cap A) \cup (C \cap \overline{A})$$

$$p(C \cap \overline{A}) = p(C) - p(C \cap A) = p(C) - p(C) \cdot p(A) = p(C) \cdot [1 - p(A)] = p(C) \cdot p(\overline{A})$$

Por tanto, si C y A son independientes también lo son C y $\overline{A}$.

Problema 34

Sean A y B dos sucesos con $p(A)=0'5;\ p(B)=0'3$ y $p(A\cap B)=0'1$. Calcular las probabilidades $p(A/B);\ p(A/A\cap B);\ p(A\cap B/A\cup B);\ p(A/A\cup B)$

Se pide calcular algunas probabilidades condicionadas, para lo cual debemos recordar que:

$$p(M/N)=\frac{p(M\cap N)}{p(N)}$$

Por otra parte tengamos en cuenta que: $p(M\cup N)=p(M)+p(N)-p(M\cap N)$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0'1}{0'3}=0'\widehat{3}$$

$$p(A/A\cap B)=\frac{p(A\cap(A\cap B))}{p(A\cap B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$$

$$p(A\cap B/A\cup B)=\frac{p((A\cap B)\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cup B)}=\frac{0'1}{0'5+0'3-0'1}=0'14$$

$$p(A/A\cup B)=\frac{p(A\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\frac{p(A)}{p(A\cup B)}=\frac{0'5}{0'5+0'3-0'1}=0'71$$

Problema 35

En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae al azar una bola y se anota el número extraído, a. Se devuelve la bola a la urna y se repite el proceso dos veces más, obteniéndose los números b y c. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{ax + by + c = 0}\\ \mathbf{2x + 3y = 0}\end{array}\right\}$$

sea incompatible?

El sistema sólo es incompatible cuando $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, para cualquier valor de c, pues no puede ser 0 (recordemos que sólo tomas valores del 1 al 10). ¿Cuáles son los posibles valores de a y b que cumplen esta proporción?

Sólo los valores $a = 2,\ b = 3$ ó $a = 4,\ b = 6$ ó $a = 6,\ b = 9$

Hay 3 casos de un total de 10·10=100 (el valor de c no influye).

Por tanto la probabilidad pedida es $\frac{3}{100}$

Problema 36

Un individuo tiene 3 camisas blancas, 2 azules y 2 rojas; y 4 pantalones blancos, 2 azules y 1 rojo. Toma una camisa y un pantalón al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa y el pantalón sean del mismo color?

$$p[\text{los dos del mismo color}] = p[\text{camisa B y pantalón B}] + p[\text{camisa A y pantalón A}] +$$

$$+p[\text{camisa R y pantalón R}] = p[\text{camisa B}]\cdot p[\text{pantalón B}] + p[\text{camisa A}]\cdot p[\text{pantalón A}] +$$

$$p[\text{camisa R y pantalón R}] = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7} = \frac{18}{49} = 0'3673$$

Problema 37

Un problema debe ser resuelto por tres alumnos. La probabilidad de que lo resuelva el primero es 1/2, la de que lo logre el segundo 1/3, y la de que lo consiga el tercero 1/6. Además, la probabilidad condicionada de que lo resuelva el segundo sabiendo que lo ha resuelto el primero es 2/3. Se pide:

a) Probabilidad de que lo resuelvan el primero y el segundo.

b) Probabilidad que siempre que el segundo alumno resuelva el problema, también lo resuelva el primero.

c) Sabiendo que siempre que el segundo y el primer alumno resuelven el problema también lo resuelve el tercero, calcular la probabilidad de que los tres resuelvan el problema.

a) $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0'\widehat{3}$

b) $p(A_1 / A_2) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$

c) $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0'\widehat{3}$

Este resultado es contradictorio con el dato $p(A_3) = \frac{1}{6}$ pues $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \leq p(A_3)$

Problema 38

La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es 1/4 y la probabilidad de que su mujer viva 10 años más es 1/3. Suponiendo que ambos sucesos son independientes, calcular la probabilidad de que al menos uno de ellos siga vivo después de los 10 años

Hay que tener en cuenta que al ser A y B independientes se cumple $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, por tanto:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0'5$$

La probabilidad de que alguno de ellos viva diez años después es de 1/2.

Problema 39

Disponemos de un dado que tiene pintadas las caras de la siguiente forma:

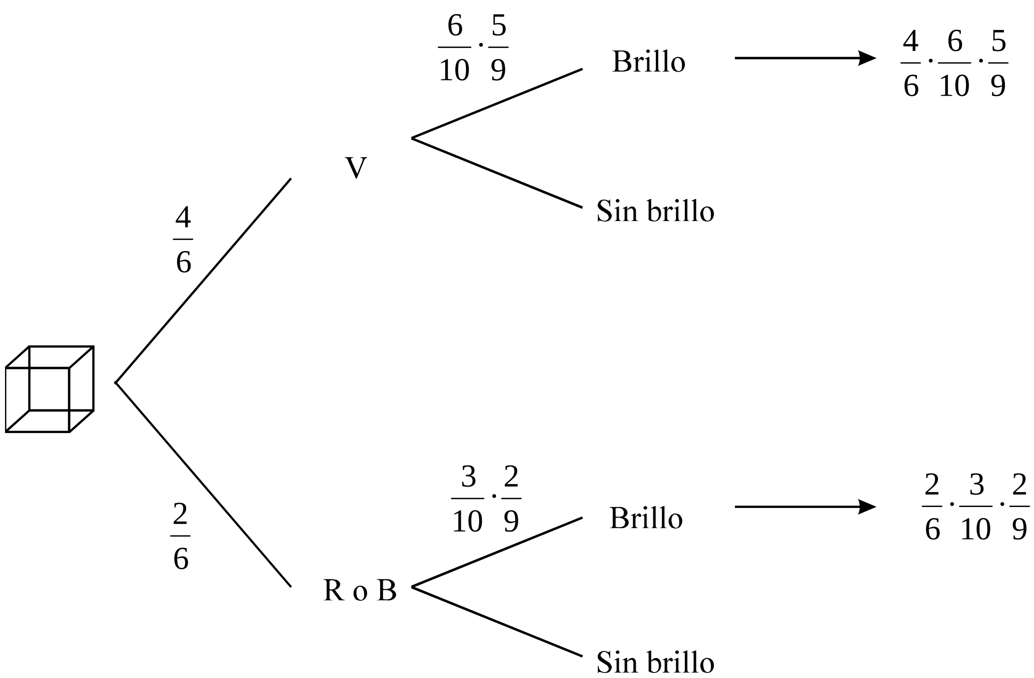
Caras 1, 2, 3 y 4 de color verde, cara 5 de color rojo, cara 6 de color blanco y de dos urnas con la siguiente composición:

Urna I: 6 bolas con brillo, 4 sin brillo y Urna II: 3 bolas con brillo, 7 sin brillo.

Lanzamos el dado y nos fijamos en el color de la cara: si sale verde vamos a la urna I, si sale rojo a la urna II y si sale blanco también a la urna II. A continuación extraemos dos bolas una a una sin remplazamiento. Se pide:

i) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo y que sean de la urna I.

ii) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo.



i) $p\left[\text{Urna I y dos bolas brillantes}\right] = \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{2}{9} = 0'\widehat{2}$

ii) $p\left[\text{Urna II y dos bolas brillantes}\right] = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{45} = 0'0\widehat{2}$

$p\left[\text{Dos bolas brillantes}\right] = p\left[\text{Urna I y 2 brillantes}\right] + p\left[\text{Urna II y 2 brillantes}\right] =$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{45} = \frac{11}{45} = 0'2\widehat{4}$$

Problema 40

Suponiendo que la riqueza es independiente del sexo, calcular:

a) Las probabilidades que faltan en la tabla

	Rico/a	**Pobre**	**Total**
Hombre			**0'607**
Mujer			**0'393**
Total	**0'002**		

b) La probabilidad de que sabiendo que una persona no es pobre que sea hombre.

c) La probabilidad de que una persona sea rica o mujer.

a)

	R	P	Total
H	$H\cap R$	$H\cap P$	0'607
M	$M\cap R$	$M\cap P$	0'393
Total	0'002	0'998	1

$$P(H\cap R)=p(H)\cdot p(R)=0'607\cdot 0'002=0'001214$$

$$P(M\cap R)=p(M)\cdot p(R)=0'393\cdot 0'002=0'000786$$

	R	P	Total
H	0'001214	0'605786	0'607
M	0'000786	0'392214	0'393
Total	0'002	0'998	1

b) $p(H/R)=\dfrac{0'001214}{0'002}=0'607$

Esto se podría haber afirmado sin necesidad de obtener los restantes datos de la tabla, pues, por ser independientes el sexo y la riqueza es $p(H/R)=p(H)$.

c) $p(R\ \text{o}\ M)=1-p\left(P\ \text{y}\ H\right)=1-0'605786=0'394214$

En este caso, al ser Hombre-Mujer, Rico-Pobre sucesos mutuamente excluyentes, este tipo de probabilidades se obtiene con sencillez a partir de la tabla.

Problema 41

Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcule la probabilidad de que al menos una de las tres cartas llegue a su destino correcto.

Representaremos todas las posibilidades y contaremos las favorables (algún acierto) y las posibles.

Buzones	A	B	C	
Repartos posibles	A	B	C	← Repartos con algún acierto
	A	C	B	←
	B	A	C	←
	B	C	A	
	C	A	B	
	C	B	A	←

$$p(\text{algún acierto}) = \frac{4}{6} = 0'\widehat{6}$$

Problema 42

Una comisión delegada de un pleno de cierto ayuntamiento está formada por 10 concejales de los cuales 5 pertenecen al partido A, 4 al partido B y 1 al partido C. Se eligen al azar y de forma sucesiva 3 personas de dicha comisión. Calcula la probabilidad de que las tres pertenezcan a:

a) Partidos distintos.
b) Al partido A.
c) Al partido C.

a) $p\left[1^o A,\ 2^o B, 3^o C\right] = p\left[1^o A\right] \cdot p\left[2^o B / 1^o A\right] \cdot p\left[3^o C / 1^o A \text{ y } 2^o B\right] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0'02\widehat{7}$

$p\left[\text{uno de cada partido}\right] = p\left[1^o A,\ 2^o B, 3^o C\right] \bullet (\text{n}^o \text{ de ordenacioness dist int as}) = 0'2\widehat{7} \cdot 3! = 0'1\widehat{6}$

b) $p\left[1^o A,\ 2^o A, 3^o A\right] = p\left[1^o A\right] \cdot p\left[2^o A / 1^o A\right] \cdot p\left[3^o A / 1^o A \text{ y } 2^o A\right] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0'08\widehat{3}$

c) $p\left[1^o C,\ 2^o C, 3^o C\right] = 0$ pues sólo hay un partido del C.

Problema 43

Sean A y B dos sucesos independientes de un cierto experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 1/6. Calcúlese $p(A)$ y $p(B)$.

Recordemos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

y que si A y B son independientes:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Con esto, y lo que nos dan, se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $p(A)$ y $p(B)$.

Sabemos por el enunciado que:

$$p\left(\overline{A \cup B}\right) = \frac{1}{6} = 1 - p(A \cup B) \quad \Rightarrow \quad p(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0'8\widehat{3}$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3}$$

Por tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{5}{6} = p(A) + p(B) - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} = p(A) \cdot p(B) \end{array}\right\}$$

$$p(B) = \frac{5}{6} - p(A) + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} - p(A) \quad \rightarrow \quad p(A) \cdot \left[\frac{7}{6} - p(A)\right] = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad p(A)^2 - \frac{7}{6} \cdot p(A) + \frac{1}{3} = 0$$

$$p(A) = \frac{\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{4}{3}}}{2} = \frac{\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}}{2} = \frac{\frac{7}{6} \pm \frac{1}{6}}{2} = \begin{cases} \frac{2}{3}; \quad p(B) = \frac{7}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; \quad p(B) = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto las soluciones son:

$$p(A) = \frac{1}{2} \text{ y } p(B) = \frac{2}{3} \qquad \text{o} \qquad p(A) = \frac{2}{3} \text{ y } p(B) = \frac{1}{2}$$

Problema 44

Un hombre y una mujer de la misma edad se casan a los 20 años. Las probabilidades de que lleguen a los 70 años son 0'76 para el hombre y 0'82 para la mujer. Se pregunta cuál es la probabilidad de que a los 70 años:

a) Ambos estén vivos.

b) No viva ninguno de los dos.

c) Viva solamente la mujer.

d) Viva al menos uno de los dos.

Sea A el suceso hombre que llegue a los 70 años y B el suceso mujer que llegue a los 70 años.

Nos dan dos sucesos con sus correspondientes probabilidades, $p(A)$ y $p(B)$, y se nos pide $p(A \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(B \cap \overline{A})$ y $p(A \cup B)$.

Para resolverlo, es fundamental suponer que A y B son independientes, es decir que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, lo cual no es, ni mucho menos, obviamente admisible en este enunciado: el que un miembro de una pareja llegue a los 70 años no es independiente de que llegue o no el otro. No obstante, supondremos que A y B son independientes.

a) $p(A \cap B) = 0'76 \cdot 0'82 = 0'6232$

b) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}) = [1 - p(A)] \cdot [1 - p(B)] = 0'24 \cdot 0'18 = 0'0432$

c) $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \cdot p(B) = [1 - p(A)] \cdot [p(B)] = 0'24 \cdot 0'82 = 0'1969$

d) $p(A \cup B) = 0'76 + 0'82 - 0'6232 = 0'9568$

Problema 45

Un grupo de 10 personas se sientan en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas?

Supongamos que se van a sentar juntas las personas 3 y 4. Lo pueden hacer de 9 maneras distintas, a saber:

3	4								

	3	4							

		3	4						

			3	4					

				3	4				

					3	4			

						3	4		

							3	4	

								3	4

Pero se pueden sentar en cada una de las 9 maneras distintas de dos formas, es decir, 34 ó 43

3	4								

4	3								

Como una vez fijada la pareja, quedan a su alrededor 8 lugares vacíos, el resto de las personas se pueden sentar de 8! maneras. En definitiva tenemos:

$$\text{Casos favorables} \quad \rightarrow \quad 9\cdot 2\cdot 8!$$

$$\text{Casos posibles} \quad \rightarrow \quad 10!$$

$$p=\frac{9\cdot 2\cdot 8!}{10!}=\frac{9\cdot 2\cdot 8!}{10\cdot 9\cdot 8!}=\frac{1}{5}=0'2$$

Problema 46

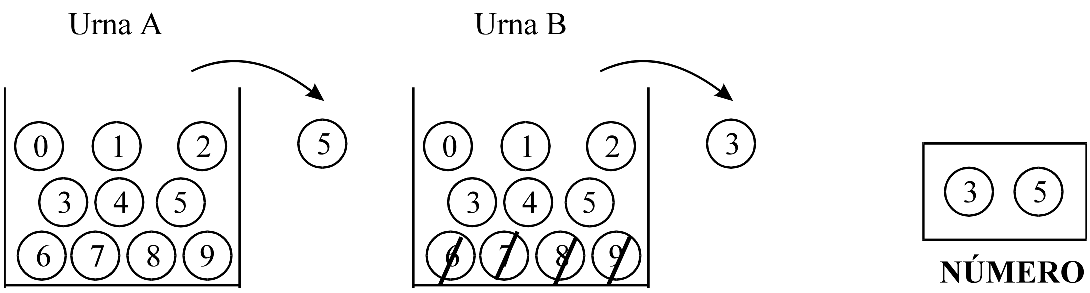
Para efectuar una rifa se tienen dos urnas A y B, tal que cada una de ellas contiene diez bolas numeradas del 0 al 9.

Se extrae una bola de la urna A y se eliminan de la urna B las bolas que tienen una numeración mayor que la bola extraída de la urna A. Seguidamente se extrae una bola de la urna B.

El número ganador se obtiene poniendo en el lugar de las decenas el número de la bola extraída de la urna B y en el lugar de las unidades el número de la bola extraído de la urna A.

a) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 48.

b) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 17.



Extraemos una bola de la primera urna A. Es la cifra de las unidades.

Suprimimos de la urna B las bolas con numeración superior a la extraída en A. Extraemos, después, una bola de B. Es la cifra de las decenas.

a) La probabilidad de obtener un número $(a \le b)$ es:

$p(\text{b en la urna A}) \cdot p(\text{a en B / supuesto que salió b en A}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{b+1}$ (pues hay b+1 números menores o iguales a b).

$$p(48) = p(\text{8 en A y 4 en B}) = p(\text{8 en A}) \cdot p(\text{4 en B / 8 en A}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0'0\widehat{1}$$

b) $p(17) = p(\text{7 en A y 1 en B}) = p(\text{7 en A}) \cdot p(\text{1 en B / 7 en A}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = 0'0125$

Problema 47

Cinco aviones tienen como misión la destrucción de un objetivo. Si cada uno de ellos lanza una bomba y la probabilidad de acierto es 0'3, ¿cuál es la probabilidad de que se haya cumplido la misión? ¿Y de que sólo haya acertado un avión?

Sea A_i el suceso "el avión i-ésimo ha acertado el blanco". Estos sucesos A_i son independientes entre sí y, por tanto, también lo son sus contrarios.

La misión se cumplirá si acierta al menos un avión, y sabemos que la probabilidad de que acierte al menos un avión es igual a la unidad menos la probabilidad de que no acierte ninguno.

$$p(\text{no acierte ninguno}) = p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5\right) = p\left(\overline{A}_1\right) \cdot p\left(\overline{A}_2\right) \cdot p\left(\overline{A}_3\right) \cdot p\left(\overline{A}_4\right) \cdot p\left(\overline{A}_5\right) =$$

$$0'7 \cdot 0'7 \cdot 0'7 \cdot 0'7 \cdot 0'7 = 0'1680$$

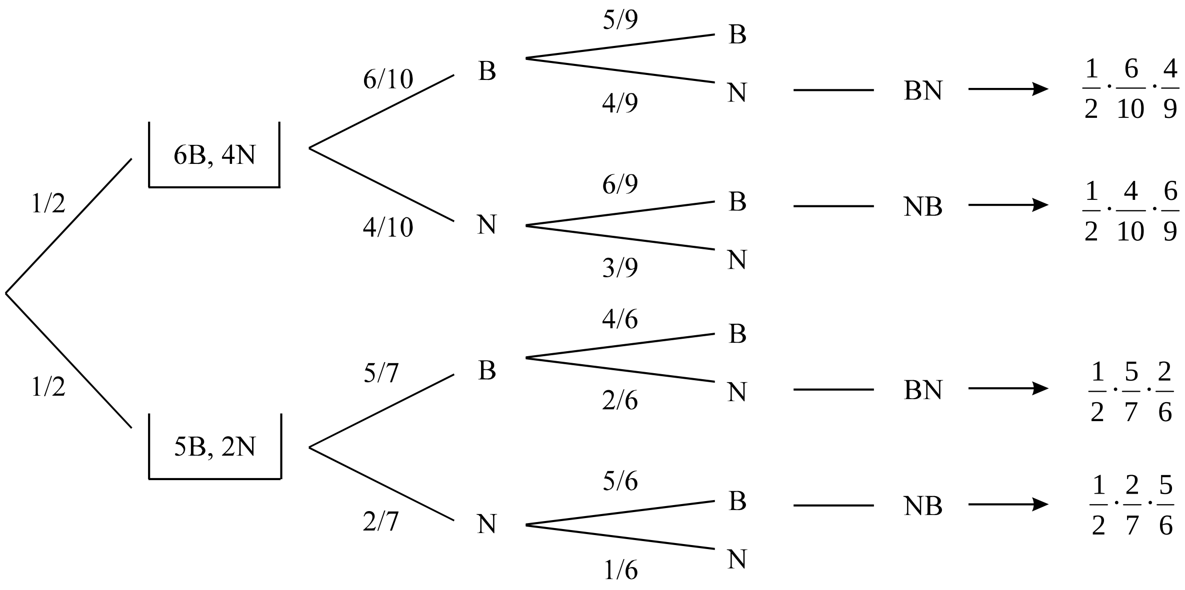
$$p(\text{al menos un avión haga blanco}) = 1 - 0'1680 = 0'832$$

$$p(\text{sólo acierte un avión}) = p\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5\right) + p\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5\right) + \cdots$$

$$\cdots\cdots + p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5\right) = 5 \cdot 0'3 \cdot 0'7^4 = 0'360$$

Problema 48

Una urna A tiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin remplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?



$$\text{p(2 de distinto color)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = 0'5047$$

Problema 49

Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras?

1º		*2º*		
CC	—	CC	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
CX	—	CX	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
CX	—	XC	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
XC	—	CX	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
XC	—	XC	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
XX	—	XX	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$$6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{16} = 0'375$$

Problema 50

Se colocan al azar en línea las letras de la palabra "matemáticas".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra formada empiece por dos consonantes?

b) ¿Y la de que empiece por vocal y termine por consonante?

a) Como en la palabra matemáticas se repiten 2 veces la "m", 2 veces la "t" y 3 veces la "a" el número posibles de palabras distintas que podemos formar con todas las letras es:

$$PR_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 1.663.200 \text{ palabras distintas}$$

De todas las palabras distintas que podemos formar empezarán por dos consonantes las que comiencen por: mm, mt, mc, ms, tm, tc, tt, ts, cm, ct, cs, sm, st y sc.

Comienzan por mm	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$	Comienzan por ts	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$
Comienzan por mt	$\longrightarrow PR_9^{3}$	Comienzan por cm	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$
Comienzan por mc	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$	Comienzan por ct	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$
Comienzan por ms	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$	Comienzan por cs	$\longrightarrow PR_9^{3,2,2}$
Comienzan por tm	$\longrightarrow PR_9^{3}$	Comienzan por sm	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$
Comienzan por tc	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$	Comienzan por st	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$
Comienzan por tt	$\longrightarrow PR_9^{3,2}$	Comienzan por sc	$\longrightarrow PR_9^{3,2,2}$

Es decir, empiezan por dos consonantes $2\cdot PR_9^{3} + 10\cdot PR_9^{3,2} + 2\cdot PR_9^{3,2,2} = 453.600$

La probabilidad de que la palabra formada empiece por dos consonantes será entonces:

$$p(\text{comiencen por 2 consonantes}) = \frac{453.600}{1.663.200} = 0'2727$$

b) Las palabras distintas que empiezan por vocal y terminan por consonante son: am, at, ac, as, em, et, ec, es, im, it, ic e is.

Comienzan por am $\longrightarrow$ $PR_9^{2,2}$

Comienzan por at $\longrightarrow$ $PR_9^{2,2}$

Comienzan por ac $\longrightarrow$ $PR_9^{2,2,2}$

Comienzan por as $\longrightarrow$ $PR_9^{2,2,2}$

Comienzan por em $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2}$

Comienzan por et $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2}$

Comienzan por ec $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2,2}$

Comienzan por es $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2,2}$

Comienzan por im $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2}$

Comienzan por it $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2}$

Comienzan por ic $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2,2}$

Comienzan por is $\longrightarrow$ $PR_9^{3,2,2}$

Es decir, empiezan por vocal y terminan por consonante

$$2\cdot PR_9^{2,2}+4\cdot PR_9^{3,2,2}+PR_9^{2,2,2}+5\cdot PR_9^{3,2}=438.480$$

$$p(\text{comiencen por vocal y terminen por consonante}=\frac{438.480}{1.663.200}=0'2636$$

Problema 51

De una baraja de 40 cartas se toman 4. Halla la probabilidad de que sean de palos distintos.

- $p(4)=p(\text{Oros})\cdot p(\text{copas}/\text{oros})\cdot p(\text{bastos}/\text{copas}\cap\text{oros})\cdot p(\text{espadas}/\text{oros}\cap\text{copas}\cap\text{bastos})=$

$$\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{10}{38}\cdot\frac{10}{37}\cdot P_4=\frac{10.000}{2.193.360}\cdot 4!=0'109421162$$

- Otra forma de enfocarlo es utilizando las combinaciones:

$$p(4)=\frac{C_{10,1}\cdot C_{10,1}\cdot C_{10,1}\cdot C_{10,1}}{C_{40,4}}=\frac{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}{\frac{40!}{4!\cdot(40-4)!}}=0'10942$$

Problema 52

Se lanzan 3 monedas sucesivamente y se llama A al suceso "obtener cruz en el primer lanzamiento", B al suceso "obtener cara" y C al suceso "obtener dos cruces".

a) ¿Son A y B incompatibles? ¿Independientes? ¿Y A y C?

b) Hallar la probabilidad de la unión de A con B y con C.

c) Hallar la probabilidad de la intersección de A, B y C.

a) $A=\{XCC, XXC, XCX, XXX\}$ $\quad B=\{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\}$

$$C=\{XXC, XCX, CXX\}$$

$A\cap B=\{XCC, XXC, XCX\}\neq\phi$, luego A y B son compatibles.

$p(A\cap B)=\dfrac{3}{8}=0'375 \qquad p(A)\cdot p(B)=\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{28}{64}=0'4375 \qquad \Rightarrow$

A y B son dependientes por ser $\quad p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$

$A\cap C=\{XXC, XCX\}\neq\phi$, por tanto A y C son compatibles.

$p(A\cap C)=\dfrac{2}{8}=0'25 \qquad p(A)\cdot p(C)=\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{12}{64}=0'1875$

A y C son dependientes por ser $\quad p(A\cap C)\neq p(A)\cdot p(C)$

b) $p(A\cup B\cup C)=p(E)=1$

c) $A\cap B\cap C=\{XCC, XCX\} \qquad p(A\cap B\cap C)=\dfrac{2}{8}=0'25$

Problema 53

Se lanzan 5 dados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener algún uno?
b) ¿Y la probabilidad de obtener exactamente 3 puntuaciones iguales?
c) ¿Y la probabilidad de obtener al menos 3 puntuaciones iguales?
d) ¿Y la probabilidad de obtener al menos 2 puntuaciones iguales?

a) $p(\text{al menos un } 1) = 1 - p(\text{ningún } 1) = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0'5981$

b) Veamos cómo se obtienen los casos favorables al suceso "obtener exactamente 3 veces la misma puntuación":

Primero, se puede elegir de 6 maneras la puntuación que se va a repetir 3 veces, es decir, puede ser 111, 222, 333, 444, 555 ó 666.

De esas seis maneras, cada una de ellas puede situarse en la caída de $C_{5,3}$ maneras diferentes como se observa en el siguiente diagrama.

1	1	1		

1	1			1

1			1	1

1		1		1

		1	1	1

Por último los dos dados restantes pueden situarse en los huecos que quedan de $VR_{5,2}$ formas distintas, ya que si hemos fijado un número que se repite 3 veces este número no puede encontrarse en cualquiera de los otros dos lugares, por tanto tenemos para escoger 5 números.

Los casos posibles es fácil ver que son $VR_{6,5}$, por tanto la probabilidad pedida es:

$$P(\text{obtener exactamente 3 veces la misma puntuación}) = \frac{6\cdot C_{5,3}\cdot VR_{5,2}}{VR_{6,5}} = \frac{6\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 5^2}{6^5} = 0'1929$$

Un cálculo similar proporciona:

$$P(\text{obtener exactamente 4 veces la misma puntuación}) = \frac{6\cdot C_{5,4}\cdot 5}{VR_{6,5}} = \frac{6\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 5}{6^5} = 0'0192$$

$$P(\text{obtener exactamente 5 veces la misma puntuación}) = \frac{6}{VR_{6,5}} = \frac{6}{6^5} = 0'00077$$

c) $P(\text{al menos 3 veces veces la misma puntuación}) = 0'1929 + 0'0192 + 0'0007 = 0'2128$

d) Según lo anterior, para obtener el número de casos en los que se obtiene "al menos 2 veces la misma puntuación" bastaría sumar los casos en los que hay "exactamente 2 veces la misma puntuación" (es decir, alguna puntuación repetida pero ninguna triplicada). Sin embargo, este último recuento se complica, puesto que puede haber dos puntuaciones que se repitan 2 veces cada una....Más vale emplear un recurso muy simple: lo contrario de "al menos dos veces la misma puntuación" es "cinco puntuaciones distintas"; y está claro que esto se produce en $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ de los 6^5 casos posibles.

$$P(\text{5 puntuaciones distintas}) = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6^5} = 0'0925$$

con lo cual

$$P(\text{al menos 2 veces la misma puntuación}) = 1 - 0'0925 = 0'9074$$

Como comprobación, puede hacerse el cálculo directo de la probabilidad de que haya alguna puntuación repetida, pero ninguna triplicada. Una sola pareja se puede conseguir eligiendo una de las 6 puntuaciones para que se repita, dos de entre los cinco dados para que muestren tal puntuación y 3 puntuaciones diferentes más para colocarlas en los lugares restantes. esto hace un total de:

$$p(\text{2 puntuaciones iguales y otras 3 distintas}) = \frac{6 \cdot C_{5,2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} = 0'4629$$

Por otra parte, para conseguir dobles parejas hay que elegir las dos puntuaciones que se repetirán, lo cual puede hacerse de $C_{6,2}$ maneras distintas. A continuación elegimos 2 de entre los cinco dados para que aparezca la menor de las dos puntuaciones seleccionadas, y dos de entre las tres restantes para la puntuación mayor; por último, el otro dado se puede situar mostrando uno de los 4 resultados que todavía no han aparecido. Así se tiene:

$$P(\text{2 puntuaciones repetidas y 1 tercera distinta}) = \frac{C_{6,2} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,2} \cdot 4}{6^5} = 0'23124$$

Por lo tanto resulta:

$$P(\text{exactamente 2 veces la misma puntuación}) = 0'4629 + 0'2314 = 0'6943$$

y se obtiene:

$$P(\text{al menos 2 veces la misma puntuación}) = 0'2129 + 0'6943 = 0'9072$$

Problema 54

En una lotería, los billetes están numerados consecutivamente desde el 0000 al 9.999.

a) Si una persona compró una serie de números del 1231 al 1240 ¿cuál será la probabilidad de tener premio?
b) ¿Y si se sabe que el premio acaba en 2?
c) Hallar la probabilidad de que obtenga el primer premio un número que sólo tenga tres cifras distintas, tales como 0094, 3283, 8550,....

a) $p = \dfrac{10}{10.000} = 0'001$

b) $p = \dfrac{1}{1000} = 0'001$

c) Los casos posibles son 10.000

Las posibilidades de elegir 3 cifras distintas son: $C_{10,3}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$. Como se ha de repetir una de las cifras de cada grupo, cada uno de estos 120 nos da tres nuevas posibilidades, y tendremos entonces $120\cdot 3=360$.
Cada uno de estos 360 grupos es de la forma aabc, abbc, abcc, Si permutamos las letras obtendremos finalmente todos los números posibles,. Así, el grupo aabc da lugar a 12 números puesto que

$$PR_4^2=\frac{4!}{2!}=12$$

Por tanto el número de billetes favorables es: $360\cdot 12=4.320$

$$p(\text{obtener el primer premio})=\frac{4320}{10.000}=0'432$$

Problema 55

Una batería antiaérea dispone de tres cañones, siendo 0'7, 0'8 y 0'9 la probabilidad de hacer blanco con cada uno. Calcular las probabilidades de hacer uno, dos o tres blancos.

1ª forma

$$p(1\text{ blanco})=p\left(1^o\cap\overline{2}^o\cap\overline{3}^o\right)+p\left(\overline{1}^o\cap 2^o\cap\overline{3}^o\right)+p\left(\overline{1}^o\cap\overline{2}^o\cap 3^o\right)=$$

$$0'7\cdot 0'2\cdot 0'1+0'3\cdot 0'8\cdot 0'1+0'3\cdot 0'2\cdot 0'9=0'092$$

$$p(2\text{ blancos})=p\left(1^o\cap 2^o\cap\overline{3}^o\right)+p\left(1^o\cap\overline{2}^o\cap 3^o\right)+p\left(\overline{1}^o\cap 2^o\cap 3^o\right)=$$

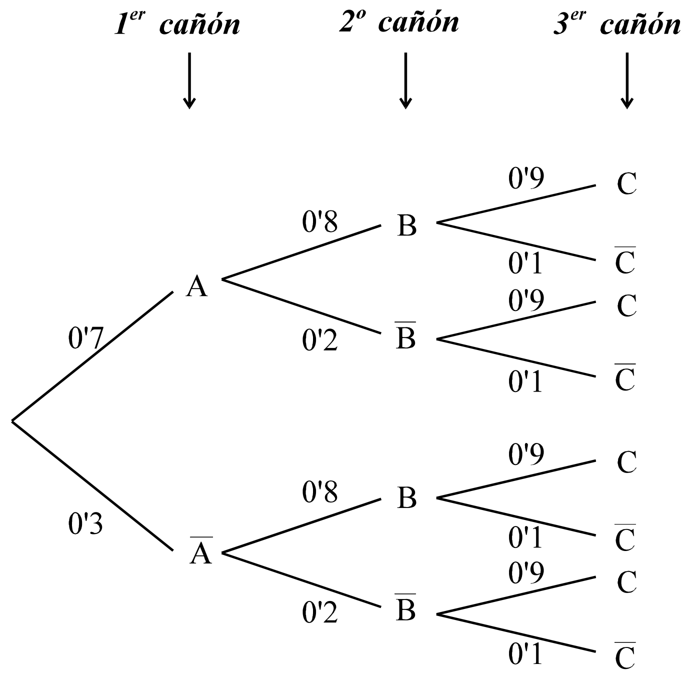
$$0'7\cdot 0'8\cdot 0'1+0'7\cdot 0'2\cdot 0'9+0'3\cdot 0'8\cdot 0'9=0'398$$

$$p(3\text{ blancos})=p\left(1^o\cap 2^o\cap 3^o\right)=0'7\cdot 0'8\cdot 0'9=0'504$$

2ª forma

Sean los sucesos:

$A=\{$Acierta con el primer cañón$\}$ $B=\{$Acierta con el segundo$\}$ $C=\{$Acierta con el tercero$\}$



1er cañón
2º cañón
3er cañón
A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
C
$\overline{C}$
0'7
0'3
0'8
0'2
0'9
0'1